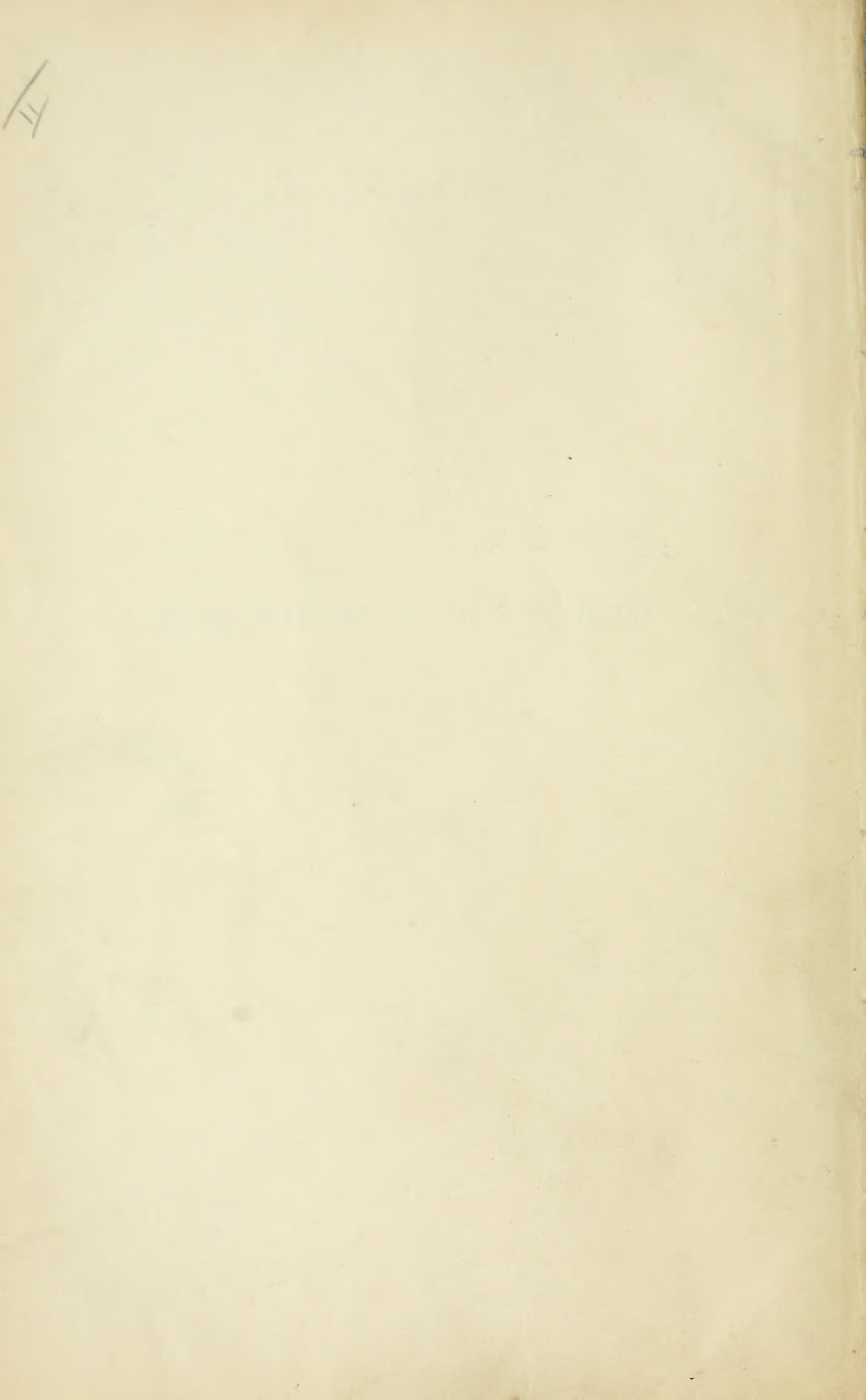

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219516 0

10162

I

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE



COURS

d'Analyse Infinitésimale

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin

Professeur à l'Université de Louvain

Correspondant de l'Académie Royale de Belgique

TOME II

LOUVAIN
A. Uystpruyst-Dieudonné
ÉDITEUR
10, rue de la Monnaie, 10.

PARIS
Gauthier-Villars
ÉDITEUR
55, Quai des Grands Augustins, 55.

1906

AVERTISSEMENT

Ce second volume du *Cours d'analyse infinitésimale* s'adresse comme le précédent aux élèves ingénieurs et aux candidats en sciences physiques et mathématiques. Nous avons introduit deux textes différents dans le tome II comme dans le tome I et pour les mêmes raisons. Le grand texte se suffit à lui-même, à part quelques rares emprunts au petit texte du tome I (Existence des fonctions implicites et formules de Frenet.)

Les matières principales que nous avons traitées sont la théorie des intégrales multiples, celle des intégrales généralisées et en particulier des eulériennes, celle des équations différentielles et la suite des applications géométriques.

Nous commençons par exposer la théorie des intégrales doubles sous une forme aussi simple que possible. La méthode que nous suivons est assez différente de la méthode classique, mais elle est bien aussi naturelle pour les élèves, et l'expérience de l'enseignement nous a prouvé qu'elle rend moins ingrate la tache du professeur qui veut être exact.

Nous étudions ensuite avec soin les intégrales à champ illimité et celles des fonctions infinies (intégrales généralisées), mais en visant beaucoup plus à l'utilité pratique des règles qu'à leur plus grande généralité. Nous pensons avoir suffisamment montré, par les nombreuses transformations de la théorie des eulériennes, que les règles

simples et précises que nous avons établies permettent de traiter les intégrales généralisées classiques sans plus de longueurs ni d'embarras que des intégrales proprement dites.

Nous donnons une démonstration nouvelle de l'existence des intégrales des équations différentielles, les variables étant réelles. Cette démonstration est très concise et fait immédiatement reconnaître le continuité des solutions. Il serait d'ailleurs facile d'y rattacher la plupart des démonstrations classiques.

Beaucoup de problèmes relatifs à l'art de l'ingénieur conduisent à des équations différentielles qui dépendent de celles de Bessel et de Riccati. Celles-ci fournissent un excellent exemple d'équations intégrables par les séries, et nous les avons traitées complètement mais dans le petit texte. Par une méthode nouvelle, nous obtenons immédiatement l'intégrale sous forme explicite quand cette intégrale s'obtient sous forme finie.

La loi belge exige des élèves ingénieurs et des candidats en sciences physiques et mathématiques la connaissance des *Eléments du calcul des variations et du calcul des différences*. Nous consacrons un chapitre spécial à ces deux questions, en nous bornant strictement, dans le calcul des variations, aux notions indispensables pour obtenir des conditions nécessaires de maximum ou de minimum. Dans l'état actuel de cette théorie, on ne peut aller plus loin sans s'engager dans des discussions minutieuses qu'il convient de réserver pour les doctorats.

Les deux derniers chapitres renferment des applications géométriques, dont la plupart pouvaient se traiter sans calcul intégral ; mais nous leur avons laissé la place qu'elles occupent naturellement dans notre enseignement et non sans un certain profit.

Ce volume ayant pris des proportions considérables, nous avons renoncé à y mettre les principes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous espérons pouvoir publier cette théorie plus tard avec d'autres questions relatives au doctorat.

Ch.-J. de la Vallée Poussin.

Louvain, le 1er Novembre 1905.

———

Table analytique des matières

Les nombres entre parenthèses désignent les numéros du cours.

CHAPITRE I

Intégrales multiples.

CHAPITRE II

Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégration des différentielles totales exactes.

[1] Voir la *Note complémentaire* à la fin du volume.

CHAPITRE III

Equations différentielles.

Généralités. Equations du premier ordre.

CHAPITRE IV

Equations différentielles *(Suite)*.

Equations d'ordre supérieur au premier ; systèmes d'équations.

CHAPITRE V

Equations aux dérivées partielles et aux différentielles totales.

Paragraphes | Pages

CHAPITRE VI

Questions spéciales :

Fonctions circulaires et Eulériennes ; Séries de Fourier.

CHAPITRE VII

Notions sur le calcul des variations et le calcul des différences

CHAPITRE VIII

Applications géométriques (suite)

Points singuliers. Contact. Enveloppes.

CHAPITRE IX

Applications géométriques (suite).

Lignes tracées sur une surface.

NOTE COMPLÉMENTAIRE.

Errata du tome II

Pages	*Lignes*	*au lieu de*	*lisez*
18	18	coordonnées	coordonnés
22	24	$u = \xi,\ v = \eta$	$u = \xi,\ v = \eta$ et $\zeta = \text{const.}$
23	30	$\int_C x\,dy$	$\int_{C'} x\,dy$
36	5	MOX	ZOX
42	9	R$dydz$	R$dxdy$
—	23	$dydz - \int\int_D R(x, y, z_1)\,dydz$	$dxdy - \int\int_D R(x, y, z_1)\,dxdy$
52	20	$= a^3b\,\frac{\pi}{2}$	$= a^3b\,\frac{\pi}{4}$
75	19	$L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$	$(L - \varepsilon)\,\varphi(x)$ et $(L + \varepsilon)\,\varphi(x)$
76	22 et 23	x^a	x^α
80	avant-dernière	$\frac{\psi_2(x)}{(c-x)^\alpha}$	$\frac{\psi_2(x)}{(x-c)^\alpha}$
87	19	contenu dans D'	contenu dans D'_2
—	dernière	auusi	aussi
104	23	$x : \sqrt{t}$	$x\sqrt{t}$
106	1	des seconds membres	du second membre
110	8	§ 4	§ 5
111	14	$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dz$	$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx$
114	5	§ 5	§ 6
120	10	F(X,Y)	P(X,Y)
127	23	l'équation (5)	l'équation (4)
128	17	$,\dots f_n = 0$	$\dots f_1 = 0$
130	31	f et f'	f et f'_y
142	5	rapport, à y'	rapport à y',
146	5	$h =$	$y =$
—	11	$= X(y - y_1)$	$= -X(y - y_1)$
148	11	substitution $y = u' : u$	substitution $z = u' : u$
152	15	**124**	**134**
159	22	$-2(p+1)$	$-2(p-1)$
160	14	$y = px + \varphi(p)$	$y = px + \psi(p)$
165	26	des projections des lignes	des lignes
166	4	$y^{A}, = \alpha x^{B},$	$y^{A} = \alpha x^{B}.$
169	dernière	$W(u, u, \dots u_n)$	$W(u_1, u_2, \dots u_n)$
170	9	leur dérivées	leurs dérivées
174	17	l'équation (10)	l'équation (11)
181	7	$y'' + Xy + 0$	$y'' + Xy = 0$
181	16, 18 et 21	u	u_1
182	32	n° 155	n° 156
191	14	le valeur	la valeur

Pages	*Lignes*	*au lieu de*	*lisez*
194	26	est la forme (18)	est de la forme (18)
205	24	du nº 116	du nº 118
208	29	$y'' + \frac{2p}{t} y'' \pm y$	$y'' + \frac{2p}{t} y' \pm y$
215	8	$y'' - y'^2 = y^2 \operatorname{Log} y$	$yy'' - y'^2 = y^2 \operatorname{Log} y$
227	26	$= - \cos \frac{s}{a}.$	$= - a \cos \frac{s}{a}.$
231	35	$f(t, x, y, z, u)$	$f(t, x, y, z, z', u, u')$
232	11 et 12	x	x'
238	2	de l'équation	du système
248	11	du_l	du_{p+k}
250	27	Prenons x	Prenons x_1
253	2	$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$	$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$
273	4	$t_n = \lambda_n t_n$	$t_n = \lambda_n t_1$
—	16	$F_i\left(x, y, z, x, \frac{x_2}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_n}\right)$	$F_i\left(x, y, z, t_1, \frac{t_2}{t_1}, \dots \frac{t_n}{t_1}\right)$
—	—	$= F_i\left(x_0, y_0, z_0, 0, \frac{x_2}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_1}\right)$	$= F_i\left(x_0, y_0, z_0, 0, \frac{t_2}{t_1}, \dots \frac{t_n}{t_1}\right)$
279	9	$\left(-\frac{x^2}{2\pi}\right)^p$	$\left(-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^p$
283	28	**du 1**re	**de 1**re
299	11	première	dernière
305	15	$= \lim \int_0^{\pi - b} F(\alpha)$	$= \lim \int_0^{\pi - b} F(\pi - \alpha)$
306	7	pour $\alpha = \pi$	pour $\alpha = 0$ ni pour $\alpha = \pi$
314	24	$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}}$
325	22	$x = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$	$x = \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2 \dots)$
330	5	proportion	proposition
340	12	et la limite 1	et à la limite 1
357	avant-dernière	Σu	$\Delta x \Sigma u$
387	7	**243**	**343**
397	8	*rapport*	*par rapport*
407	dernière	intégrant	intégrants

Suite de l'errata du tome I (1903).

Pages	*Lignes*	*au lieu de*	*lisez*
8	19	$u = \lim a$	$\lim u = a$
14	24	supérieures et inférieures	supérieure et inférieure
17	1-2	—	—
25	9	le déterminer	la déterminer
—	36	supérieures et inférieures	supérieure et inférieure
44	26	$v' =$	$y' =$
59	26	θx	$\theta \Delta x$

Pages	Lignes	au lieu de	lisez
60	28	constante a	constante a !
61	8	On a	V. On a
82	27	$=\frac{1}{6}$	$=\frac{1}{18}$
126	28	$+2\frac{\partial F}{\partial x \partial y}$	$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
144	avant-dernière	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{x^2-1}$
145	12	$+a^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$
191	17-18	supérieures et inférieures	supérieure et inférieure
200	dernière	$f(x)\,dx$	$f(x)\,\varphi(x)\,dx$
207	15	quel que	quelque
—	23	que fût b	que fût ε
249	29	x'^2	x'^3
252	19	$y+2x'$	$y-2x'$
256	18	épicycloïde	hypocycloïde
264	23	coordonnées	coordonnés
272	19	$F''(t)$	$F''(t) = 0$
277	12	γ	λ
280	28	des coordonnées	des dérivées des coordonnées
284	19	autour d'un axe	autour d'un axe qui lui est parallèle
299	dernière	$=\frac{1}{2a}$	$=\frac{a}{2}$
309	23	deux chaînons	deux ou trois chaînons
329	15	précédent, nous	précédent nous
330	27	de r_n et de r'_n	de u et de v
334	11	$s_n=\varphi(n)$	$s_n=\varphi(n+1)$
—	20	$R_n - R_{n-1}$	$R_{n-1} - R_n$
335	17	généraux u_{n-1}	généraux u_n
336	8-9	u_n finit par être égal ou supérieur à l'unité. Le terme général	le terme général u_n
346	28	$(s_2-s_1)\alpha_1$	$(s_2-s_1)\alpha_2$
	30	$s_n(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$	$s_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$
352	26	$u_n\,dx$	$u'_n\,dx$
364	15	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$
—	19	entre 0 et 1	entre -1 et 1
—	dernière	$2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi$	$2\,\mathrm{tg}\,2\varphi$
368	15-16	négatif	positif

CHAPITRE I.

Intégrales multiples.

---

§ 1. Théorie élémentaire des intégrales doubles [1].

1. Notions relatives à un domaine D à deux variables. — Rapportons les variables x et y à deux axes rectangulaires. Traçons dans le plan xy un contour C fermé, qui ne se coupe pas lui-même. On dit alors que C est un *contour simple.* Ce contour enveloppe une portion D du plan. Si le point M (x, y) représentatif du système de variables x, y, peut prendre toutes les positions comprises dans l'intérieur du contour C et sur ce contour lui-même, nous dirons que les variables x, y varient dans le *domaine* ou dans l'*aire* D.

Pour éviter toute obscurité, nous supposerons que le contour C se compose d'un nombre limité de segments de lignes droites ou courbes, mais que, sur chacun des segments de courbes, la variation de x et de y ne change pas de sens quand on parcourt le contour. Il est clair qu'un tel segment de courbe ne peut être coupé qu'en un point par une parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y.

Plus généralement, le domaine considéré D pourra s'étendre à la portion du plan intérieure à un contour C et extérieure à d'autres contours C′, C″,... soumis aux mêmes restrictions que C. Enfin le domaine D pourra se composer de plusieurs domaines séparés D′, D″,... définis comme le précédent. Dans ces divers cas, on dit que le domaine D est *à contour complexe.*

Les contours C, C′,... constituent la *frontière* du domaine D. Cette frontière fait donc, par définition, partie du domaine lui-même.

Nous appelons *diamètre* d'un domaine D le maximum de la distance de deux de ses points (donc de deux points de sa frontière).

On peut généraliser ces notions d'un domaine et de sa frontière, mais les définitions générales sont assez abstraites et on les trouvera plus loin. (Voir la théorie des ensembles, § 5).

[1] La théorie générale rentre dans celle des intégrales multiples exposée au § 5.

2. **Propriétés des fonctions continues** [1]. — *Une fonction $f(x, y)$ est continue en un point (a, b) du domaine D, si l'oscillation de cette fonction tend vers 0 dans toute portion du domaine D qui contient ce point et dont le diamètre tend vers 0.*

Une fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine D si elle est continue en tout point de ce domaine.

Les théorèmes suivants sont fondamentaux dans la théorie des intégrales doubles :

I. *S'il est impossible de décomposer par des transversales le domaine D en parties telles que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans chaque partie (ε étant un nombre positif donné), cette fonction $f(x, y)$ est discontinue dans le domaine* D.

En effet, si l'on partage le domaine D en plusieurs parties, l'impossibilité de faire une semblable décomposition subsistera dans une au moins des parties (sinon elle n'aurait pas lieu pour l'ensemble) Donc on peut trouver dans D une partie D_1 de diamètre aussi petit qu'on veut, où la décomposition est impossible ; de même, dans D_1, une partie D_2 encore plus petite où la décomposition est encore impossible, et ainsi de suite indéfiniment. On peut ainsi former une suite de domaines $D, D_1, D_2, \ldots D_n, \ldots$ dont chacun est intérieur à tous les précédents, dont les diamètres tendent vers zéro, où enfin l'oscillation de $f(x, y)$ demeure toujours $> \varepsilon$. Ces domaines convergent vers un point M du domaine D. Ce point M est donc intérieur à un domaine D_n aussi petit qu'on veut où l'oscillation de $f(x, y)$ est $> \varepsilon$. Donc $f(x, y)$ est discontinue en ce point.

II. *Si $f(x, y)$ est continue dans le domaine D, à tout nombre positif ε correspond un nombre δ tel que l'oscillation de cette fonction soit $< \varepsilon$ dans toute partie du domaine D de diamètre $< \delta$.*

Appelons Δ un mode de partage du domaine D en parties où l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon : 2$. L'existence d'un tel mode est établie par le théorème précédent. Alors l'oscillation de $f(x, y)$ sera $< \varepsilon$ dans toute portion du domaine D assez petite pour ne pas s'étendre sur deux parties non contiguës du mode de partage Δ. Le nombre δ dont le théorème affirme l'existence peut donc être pris égal au minimum de la distance de deux parties non contiguës du mode Δ.

[1] Voir aussi le § 5 de l'introduction (Première partie du cours).

III. *Soient x, y et x', y' deux points du domaine* D ; *à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* δ *tel qu'on ait*

$$| f(x', y') - f(x, y) | < \varepsilon,$$

sous les conditions $| y' - y | < \delta$ *et* $| x' - x | < \delta$.

En effet, il suffit de choisir δ de manière que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans toute portion rectangulaire de D dont les deux côtés sont $< \delta$.

On énonce souvent cette dernière propriété en disant que, si le point x', y' du domaine D tend vers un autre point x, y du même domaine, $f(x', y')$ tend *uniformément* vers sa limite $f(x, y)$. C'est encore cette propiété qu'on veut exprimer quand on dit qu'*une fonction continue dans le domaine* D *est uniformément continue dans ce domaine.*

Il est à remarquer qu'une fonction d'une seule variable peut être considérée comme un cas particulier d'une fonction de deux variables. Aussi nous pouvons énoncer la proportion suivante comme cas particulier de la précédente :

IV. *Une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle* (a, b), *l'est uniformément. En d'autres termes, si x et x' sont deux points de cet intervalle, à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* δ *tel qu'on ait*

$$| f(x') - f(x) | < \varepsilon,$$

sous la condition $| x' - x | < \delta$.

Considérons de nouveau deux variables x, y qui varient dans un domaine D et traçons entre deux points de ce domaine une ligne continue L. On a le théorème suivant :

V. *Si $f(x, y)$ est continue en chaque point de la ligne* L, *à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* δ, *tel qu'on ait, en tout point* (x', y') *de la ligne* L *et pour tout point* (x, y) *du domaine* D,

$$| f(x', y') - f(x, y) | < \varepsilon,$$

sous les conditions $| x' - x | < \delta$, $| y' - y | < \delta$. *En d'autres termes, $f(x, y)$ est uniformément continue pour les points de la ligne* L.

Supposons, par impossible, que, ε étant donné, le théorème ne s'applique pas. Partageons L en segments par des points intermédiaires. Il y aura au moins un segment auquel le théorème ne s'appli-

quera pas (sinon il s'appliquerait à toute la ligne). On peut donc limiter sur L un segment L_1 de dimensions aussi petites qu'on veut auquel le théorème ne s'applique pas ; de même, sur L_1, un segment encore plus petit où le théorème ne s'applique pas non plus. On peut former de la sorte une suite illimitée de segments $L_1, L_2, \ldots L_n, \ldots$ successivement intérieurs les uns aux autres, indéfiniment décroissants, auxquels le théorème ne s'applique pas. Ces segments convergent vers un point (x'_1, y'_1), de la ligne L. Ce point faisant partie d'un segment aussi petit qu'on veut où le théorème est en défaut pour la valeur considérée de ε, la relation contraire

$$| f(x', y') - f(x, y) | \geqq \varepsilon$$

se vérifiera pour deux points (x', y') et (x, y) aussi voisins qu'on veut de (x'_1, y'_1) et que l'on peut, par conséquent, faire tendre vers ce point. Mais ceci est impossible, car, $f(x, y)$ étant continue au point (x'_1, y'_1), $f(x, y)$ et $f(x', y')$ tendent alors tous les deux vers $f(x'_1, y'_1)$; donc leur différence tend vers 0 et ne peut rester supérieure à ε.

Nous aurons à employer le théorème précédent dans le cas où la ligne L est une droite $y = \beta$, parallèle à l'axe des x. Alors la proposition suivante est un cas particulier de ce théoréme :

VI. *Si $f(x, y)$ est continue par tous les points d'ordonnée β et d'abscisse comprise dans un intervalle (a, A), à tout nombre positif ε correspond un nombre δ, tel que l'on ait, sous la condition $| y - \beta | < \delta$, et pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, A),*

$$| f(x, y) - f(x, \beta) | < \varepsilon.$$

3. Continuité d'une intégrale définie par rapport à un paramètre. — Si l'on intègre par rapport à x une fonction $f(x, y)$ qui dépend d'un paramètre y, il est clair que le résultat sera une fonction $\varphi(y)$ de ce paramètre. Les théorèmes suivants feront savoir si cette fonction est continue :

I. *Si $f(x, y)$ est une fonction continue de x et de y dans le rectangle R, borné par les abscisses a et A, les ordonnées b et B ; plus généralement, si cette fonction est seulement bornée dans ce rectangle mais n'admet qu'un nombre limité de points de discontinuité pour chaque valeur particulière de y, l'intégrale*

$$\varphi(y) = \int_a^A f(x, y)\, dx$$

est une fonction continue de y dans l'intervalle (b, B).

Soit, en effet, β une valeur particulière de y dans cet intervalle, nous allons montrer que $\varphi(y)$ est continue au point β.

Supposons d'abord que $f(x, y)$ n'ait aucun point de discontinuité d'ordonnée β entre les abscisses a et A. Considérons alors la relation

$$| \varphi(y) - \varphi(\beta) | \leq \int_a^A | f(x, y) - f(x, \beta) | \, dx$$

et appliquons le théorème VI qui précède.

Quelque petit que soit ε, on peut supposer, dans cette dernière intégrale,

$$| f(x, y) - f(x, \beta) | < \varepsilon,$$

sous la condition $| y - \beta | < \delta$. Alors il vient, par le théorème de la moyenne,

$$| \varphi(y) - \varphi(\beta) | < \varepsilon (A - a).$$

Donc la variation de $\varphi(y)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut et cette fonction est continue au point β.

Cette démonstration s'étend facilement au cas où $f(x, y)$ possède un nombre limité de points de discontinuité d'ordonnée β. En effet, on peut alors admettre, pour fixer les idées, qu'il n'y en ait qu'un seul et que son abscisse α soit intermédiaire entre a et A. Désignons par ε un nombre positif d'une petitesse arbitraire, et faisons la décomposition

$$| \varphi(y) - \varphi(\beta) | \leq \int_a^{\alpha - \varepsilon} + \int_{\alpha + \varepsilon}^{A} + \int_{\alpha - \varepsilon}^{\alpha + \varepsilon} | f(x, y) - f(x, \beta) | \, dx.$$

On peut d'abord rendre la dernière intégrale aussi petite que l'on veut avec ε, car, si M désigne le maximum absolu de f, cette intégrale est $< 4M\varepsilon$ par le théorème de la moyenne. Après cela, les deux intégrales précédentes sont aussi petites que l'on veut avec $| y - \beta |$ comme dans le cas précédent, car le point de discontinuité d'ordonnée β en est exclu. Donc la variation de $\varphi(y)$ peut encore être rendue aussi petite qu'on veut, et $\varphi(y)$ est continue au point β.

II. Considérons maintenant une intégrale dont les limites $x_1 = \psi_1(y)$ et $x_2 = \psi_2(y)$ sont deux fonctions continues de y dans l'intervalle (b, B). Soit

$$\varphi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx$$

cette intégrale. *Ce sera encore une fonction continue de y dans l'intervalle* (b, B), *pourvu que la fonction* $f(x, y)$ *soit continue dans le domaine*

D *compris entre les deux courbes* $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ *et les deux droites* $y = b$ *et* $y = B$; *ou, plus généralement, pourvu que* $f(x, y)$ *soit bornée dans le domaine* D *et n'ait, dans ce domaine, qu'un nombre limité de points de discontinuité pour chaque valeur particulière de* y.

Ce théorème se ramène au précédent. En effet, le domaine D peut être compris dans un rectangle R limité par les ordonnées b et B et deux abscisses convenables a et A. Désignons par $f_1(x, y)$ une fonction égale à $f(x, y)$ en tout point de D et à 0 en dehors de D. Cette fonction n'a pas d'autres points de discontinuité dans le rectangle R que ceux de f dans le domaine D et les points de la frontière de ce domaine. Il n'y en a donc qu'un nombre limité pour chaque valeur de y. Par suite, l'intégrale

$$\int_a^A f_1(x, y)\, dx$$

est fonction continue de y dans l'intervalle (b, B). Or cette intégrale se réduit à $\varphi(y)$ à cause de la définition de f_1, ce qui prouve le théorème.

4. Définition d'une intégrale double dans un rectangle par des intégrales simples. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle R compris entre les abscisses a et A, les ordonnées b et B. L'intégrale, effectuée en considérant y comme une constante,

$$(1) \qquad \int_a^A f(x, y)\, dx$$

est donc une fonction continue de y dans l'intervalle (b, B) et peut, par conséquent, s'intégrer dans cette intervalle. Cette intégration fournit l'expression suivante :

$$(2) \qquad \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx,$$

qui renferme deux signes d'intégration superposés et que l'on appelle, pour cela, une *intégrale double*. Les variables x et y que renferme cette intégrale varient dans le rectangle R. Celui-ci s'appelle l'*aire*, le *domaine* ou le *champ d'intégration*.

Nous avons d'abord supposé $f(x, y)$ continue dans le domaine R, mais l'expression (2) conserve un sens sous des conditions plus générales.

Supposons, en effet, que $f(x, y)$, tout en restant bornée dans le

rectangle R, devienne discontinue et que les points de discontinuité se répartissent sur *un nombre limité* de lignes continues que nous appellerons les *lignes de discontinuité*. Les points de discontinuité pourront d'ailleurs être disséminés sur ces lignes ou les remplir entièrement ; de sorte qu'il peut y avoir des points de discontinuité isolés.

L'intégrale double conservera un sens parfaitement clair si les lignes de discontinuité se composent exclusivement de parallèles aux axes coordonnés et de lignes n'admettant qu'un nombre limité d'intersections par des parallèles aux axes.

En effet, d'après le théorème I du n° précédent, l'intégrale (1) demeure fonction continue de y, sauf pour les valeurs exceptionnelles qui correspondent à une ligne de discontinuité parallèle à l'axe des x. Mais comme l'intégrale reste finie pour ces valeurs exceptionnelles de y, dont le nombre est limité, elle représente encore une fonction intégrable de y dans l'intervalle (b, B) et l'expression (2) conserve une valeur déterminée.

Nous supposerons donc dorénavant que, si $f(x, y)$ n'est pas continue dans le rectangle R, ses lignes de discontinuité satisfont aux conditions précédentes.

L'intégrale double jouit d'une propriété fondamentale qui va nous permettre d'en transformer la définition et que voici :

L'intégrale double est comprise entre $m\mathrm{R}$ *et* MR, m *et* M *étant les limites inférieure et supérieure de* $f(x, y)$ *dans le domaine d'intégration et* R *l'aire du domaine.*

On a, en effet, par le théorème de la moyenne,

$$m(\mathrm{A} - a) \leqq \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \leqq \mathrm{M}(\mathrm{A} - a).$$

Multiplions ces inégalités par dy, intégrons de b à B et remarquons que $(\mathrm{A} - a)(\mathrm{B} - b) = \mathrm{R}$; il vient

$$(3) \qquad m\mathrm{R} \leqq \int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \leqq \mathrm{MR}.$$

5. Définition d'une intégrale double dans un rectangle par des limites de sommes. — Partageons le rectangle R par un réseau à mailles rectangulaires, formé de deux systèmes de droites, les premières parallèles à l'axe des y et ayant successivement pour abscisses : $x_1 =$

$a, x_2, \ldots x_{n+1} = A$, les autres parallèles à l'axe des x et ayant successivement pour ordonnées : $y_1 = b, y_2, \ldots y_{m+1} = B$. Appelons α_{ik} l'aire de la maille comprise entre x_i et x_{i+1}, y_k et y_{k+1} ; enfin soient M_{ik} et m_{ik} les limites supérieure et inférieure de $f(x, y)$ dans la maille α_{ik}. La relation (3), appliquée au rectangle α_{ik}, donne

$$m_{ik}\,\alpha_{ik} < \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx < M_{ik}\,\alpha_{ik}.$$

Additionnons toutes les inégalités comprises dans les précédentes par la variation des indices i, k ; il viendra

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\,\alpha_{ik} < \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx < \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\,\alpha_{ik}.$$

On voit que l'intégrale double est comprise entre deux sommes doubles. Je dis qu'elle est la limite commune de ces deux sommes, quand on fait décroître indéfiniment les mailles du réseau dans les deux sens, le nombre de ces mailles augmentant indéfiniment.

Pour établir ce théorème, il suffit de montrer que la différence des deux sommes doubles, savoir

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (M_{ik} - m_{ik})\,\alpha_{ik},$$

a pour limite zéro.

Cette conclusion est immédiate si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine R, car, suivant le théorème II du n° 2, toutes les oscillations $M_{ik} - m_{ik}$ décroissent alors en-dessous de tout nombre positif donné ε quand les domaines α_{ik} tendent vers 0. Par conséquent, la somme (4) décroît en même temps en dessous de tout nombre donné, car, quand les oscillations sont $< \varepsilon$, elle est inférieure à $\varepsilon\Sigma\Sigma\alpha_{ik} = \varepsilon R$.

Cette conclusion subsiste si $f(x, y)$, restant bornée, est discontinue, pourvu que les lignes de discontinuité satisfassent aux conditions du n° précédent. En effet, les oscillations $M_{ik} - m_{ik}$ décroissent encore en dessous de ε dans tous les éléments α_{ik} quand ceux-ci tendent vers 0, sauf peut-être dans les éléments touchés par les lignes de discontinuité ou dans des éléments qui s'approchent indéfiniment de ces lignes. Mais la somme de ces éléments exceptionnels tendra vers 0 et, avec elle, la somme des termes correspondants de l'expression (4). Donc la limite de cette expression est encore nulle.

Le théorème que nous venons d'établir peut, en supprimant seule-

ment dans ce qui précède les doubles indices devenus inutiles, se formuler de la manière suivante :

L'intégrale double $\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx$ *est aussi la limite commune des deux sommes*

$$\sum_R m_i \alpha_i\,, \qquad \sum_R M_i \alpha_i\,,$$

obtenues en décomposant le domaine d'intégration R *en éléments rectangulaires infiniment petits* α_i *et en faisant la somme de tous ces éléments multipliés respectivement par les limites inférieure* m_i *et supérieure* M_i *de* $f(x, y)$ *dans chacun d'eux.*

6. Théorème de l'interversion des intégrations. Nouvelle notation de l'intégrale double. — On peut permuter les variables x et y dans tous les raisonnements du nº précédent. Comme d'ailleurs la définition de l'intégrale double comme limite de sommes ne dépend plus en rien de l'ordre dans lequel ces deux variables avaient été considérées, on obtient le théorème suivant :

La valeur de l'intégrale double dans le rectangle R *est indépendante de l'ordre dans lequel on fait les intégrations, c'est-à-dire que l'on a*

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx.$$

Dès lors, pour représenter une intégrale double dans le rectangle R, il est naturel d'adopter des notations qui rappellent à la fois sa définition comme limite de sommes et sa réduction à des intégrales simples consécutives. Nous nous servirons des symboles suivants :

$$\iint_R f(x, y)\, dR \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

La quantité $f(x, y)\, dxdy$ sur laquelle porte la double intégration s'appelle l'*élément de l'intégrale double.*

7. Intégrale double dans un domaine de forme quelconque. — La définition de l'intégrale double comme limite de sommes s'étend, sans difficulté aucune, au cas d'un domaine limité par des courbes quelconques soumises aux restrictions du nº 1.

Soit D un domaine semblable. Considérons une fonction $f(x, y)$ continue dans ce domaine, ou, plus généralement, bornée et ayant des lignes de discontinuité soumises aux mêmes conditions que précédemment (nº 4). On peut, par deux systèmes de droites parallèles

aux axes, décomposer D en éléments α_i infiniment petits. Tous ces éléments seront rectangulaires sauf sur le bord du domaine. Soient M_i et m_i les limites supérieure et inférieure de $f(x, y)$ dans α_i. La définition de l'intégrale double dans D est fournie par le théorème suivant :

Les deux sommes étendues à tous les éléments de D,

$$(1) \qquad \sum_D M_i \alpha_i, \qquad \sum_D m_i \alpha_i,$$

tendent vers la même limite quand les éléments α_i décroissent indéfiniment dans les deux sens. Cette limite commune est l'intégrale double de $f(x, y)\, dx\, dy$ dans le domaine D et elle se représente par les notations

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{ou} \qquad \iint_D f(x, y)\, d\text{D}.$$

En effet, cette limite se ramène aisément à une intégrale double dans un rectangle. Pour cela, construisons un rectangle R dont les côtés, parallèles aux axes, enveloppent le domaine D. Soient a et A les abscisses extrêmes, b et B les ordonnées extrêmes de ce rectangle.

Appelons $f_1(x, y)$ une fonction égale à $f(x, y)$ en tout point de D et à zéro en dehors de D. Les discontinuités de cette fonction seront soumises aux conditions présupposées de sorte que l'intégrale double de $f_1(x, y)$ dans R est bien déterminée.

Partageons R en éléments infiniment petits α_i par des parallèles aux axes infiniment rapprochées, ce qui fournira, en même temps, le mode de partage de D. Formons, pour la fonction f_1 et pour le rectangle R entier, les deux sommes,

$$(2) \qquad \sum_R M_i \alpha_i, \qquad \sum_R m_i \alpha_i,$$

analogues aux sommes (1) du théorème qui nous occupe mais qui ont pour limite l'intégrale de f_1 dans R. Les termes relatifs aux éléments α_i situés hors de D sont nuls, ceux qui sont relatifs aux éléments α_i situés dans D sont les mêmes dans les sommes (2) que dans les sommes (1). Les sommes correspondantes $\sum_D$ et $\sum_R$ ne diffèrent donc, en réalité, que par les termes relatifs aux éléments α_i touchés par la frontière du domaine D. Mais, comme la somme de ces éléments, donc de ces termes, tend vers 0, les sommes $\sum_D$ et $\sum_R$ ont la même limite. Il vient ainsi, comme nous l'avons annoncé

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f_1(x, y)\, d\text{R}.$$

8. Réduction aux intégrales simples. — *L'intégrale double dans le domaine* D *peut aussi se réduire à des intégrales consécutives par rapport à* x *et à* y

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f_1(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f_1(x, y)\, dy.$$

Supposons, ce qui est un cas très habituel, que le contour du domaine D ne soit coupé qu'en deux points par une parallèle à l'axe des x ou par une parallèle à l'axe des y. Alors, pour chaque valeur de x entre a et A, y varie entre deux valeurs y_1 et y_2 fonctions de x ; de même, pour chaque valeur de y entre b et B, x varie entre deux valeurs x_1 et x_2 fonctions de y. On peut, dans les formules précédentes, supprimer les intervalles d'intégration où f_1 est nulle, et, comme $f_1 = f$ dans les intervalles restants, il vient

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Plus généralement, quel que soit le contour du domaine D, on peut écrire la formule de réduction sous la forme

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx = \int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Mais il faut interpréter ce résultat comme il suit :

Supposons qu'on intègre d'abord par rapport à x, puis par rapport à y. Considérant y comme constant, on intègre par rapport à x dans tous les intervalles où $f_1 = f$, c'est à dire dans tous ceux qui fournissent, pour cette valeur de y, des points (x, y) du domaine D. En d'autres termes, l'intégration par rapport à x s'étend à la section du domaine D par la droite d'ordonnée y. Le résultat est une fonction de y, que l'on intègre ensuite par rapport à y entre les limites extrêmes du domaine D.

9. Propriétés de l'intégrale double. — I. *Soient* D *l'aire du domaine d'intégration,* M *et* m *les limites supérieure et inférieure de* $f(x, y)$ *dans* D ; *on a*

$$MD \geqslant \iint_D f(x, y)\, dD \geqslant mD.$$

En effet, l'intégrale double est la limite commune des deux sommes $\Sigma M_i \alpha_i$ et $\Sigma m_i \alpha_i$, toutes deux comprises entre $M\Sigma\alpha_i = MD$ et $m\Sigma\alpha_i = mD$.

II. Si l'on pose, en particulier, $f = 1$, on obtient l'aire du domaine d'intégration sous forme d'intégrale double

$$D = \iint_D dx\,dy.$$

III. *Si l'on décompose le domaine* D *en plusieurs parties par des transversales, l'intégrale dans* D *est la somme des intégrales prises dans chaque partie.*

Nous pouvons supposer, dans la démonstration, qu'on ait décomposé D en deux parties seulement D′ et D″ par une transversale, car le raisonnement s'étend de proche en proche aux autres cas.

Couvrons alors D d'un réseau à mailles rectangulaires α_i comme précédemment, et considérons la somme $\Sigma M_i\alpha_i$ qui a pour limite l'intégrale dans D. Abstraction faite des éléments α_i touchés par la transversale, elle se compose des deux sommes qui ont pour limites les intégrales dans D′ et dans D″. Mais les éléments touchés par la transversale donnent des sommes qui tendent vers zéro. On ne commet pas d'erreur en les négligeant, ce qui prouve le théorème.

10. Généralisation de la définition d'une intégrale double. — Soit D un domaine d'intégration. Décomposons-le par des transversales droites ou courbes en éléments d'aires bien déterminées α_i. Soient m_i et M_i les limites de $f(x, y)$ dans α_i :

L'intégrale double de $f(x, y)$ dans l'aire D *est la limite commune des deux sommes*

$$\Sigma M_i\alpha_i, \qquad \Sigma m_i\alpha_i,$$

étendues à tous les éléments de l'aire D, *quand tous les éléments α_i décroissent indéfiniment dans tous les sens.*

On a, en effet, par la propriété I du n° précédent,

$$M_i\alpha_i > \iint_{\alpha_i} f(x, y)\,d\alpha_i > m_i\alpha_i.$$

Faisons la somme de toutes les inégalités analogues ; il vient, par la propriété III,

$$\Sigma M_i\alpha_i > \iint_D f(x, y)\,dx\,dy > \Sigma m_i\alpha_i.$$

Donc les deux sommes extrêmes ont pour limite l'intégrale double, car on va voir que leur différence $\Sigma (M_i - m_i)\,\alpha_i$ a pour limite 0.

Cette conclusion est immédiate si $f(x, y)$ est continue, car toutes les différences $(M_i - m_i)$ tendent alors uniformément vers 0. Elle subsiste si $f(x, y)$ est discontinue dans les mêmes conditions que ci-dessus, car le raisonnement fait au nº 5 s'applique aussi bien au cas actuel.

On peut encore modifier la définition précédente comme il suit :

L'intégrale double de $f(x, y)$ dans D est la limite de la somme

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\, \alpha_i$$

où ξ_i, η_i est un point arbitraire de α_i et qui s'étend à tous les éléments α_i de l'aire D, *quand tous ces éléments décroissent indéfiniment dans tous les sens.*

En effet, $f(\xi_i, \eta_i)$ est compris entre m_i et M_i et, par conséquent, la somme considérée dans ce nouvel énoncé est intermédiaire entre les deux sommes de l'énoncé précédent.

11. Théorème de la moyenne. — Si $\varphi(x, y)$ est constamment de même signe dans le domaine D, et si $f(x, y)$ est compris entre les limites m et M, l'intégrale

$$\iint_D f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

sera comprise entre les deux suivantes :

$$m \iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad M \iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

C'est en cela que consiste le *théorème de la moyenne*, qui est l'analogue du théorème correspondant sur les intégrales simples et dont la démonstration est tout aussi immédiate. On remarquera que le théorème I du nº 9 en est un cas particulier.

12. Intégrales curvilignes [1]. **Formule de Green pour le plan.** — Soit $y = \varphi(x)$ une fonction continue de x dans un intervalle (a, b). Quand x varie de a à b, le point x, y décrit un arc de courbe AB. Soit $P(x, y)$ une fonction continue de x et de y ; l'intégrale définie

$$\int_a^b P(x, y)\, dx,$$

[1] La théorie la plus générale des intégrales curvilignes a été exposée dans la première partie du cours (nº 304 et suivants). Nous nous plaçons ici à un point de vue beaucoup plus élémentaire.

dans laquelle on considère y comme l'ordonnée (fonction de x) de la courbe AB s'appelle une *intégrale curviligne*. On dit qu'elle est effectuée sur la courbe AB dans le sens AB. Si l'on renversait les limites, on changerait le sens du parcours et le signe de l'intégrale. On convient de représenter cette intégrale par la notation suivante qui fait connaître *la ligne et le sens de l'intégration :*

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx,$$

et cette expression est donc équivalente à

$$-\int_{BA} P(x,y)\,dx.$$

Plus généralement, considérons une ligne K composée de plusieurs arcs consécutifs AB, BC, ..., sur chacun desquels x croît ou décroît constamment quand on décrit la ligne. L'intégrale sur la ligne K sera la somme des intégrales effectuées sur les divers arcs AB, BC, ..., lesquelles sont définies par ce qui précède.

Il est clair que, si $Q(x, y)$ est une fonction continue, l'intégrale curviligne de Qdy sur la ligue K se définira par des considérations analogues, pourvu que la courbe K se compose aussi d'un ou de plusieurs arcs sur chacun desquels y varie constamment dans le même sens.

Enfin, si nous ajoutons les intégrales de Pdx et de Qdy sur la courbe K, nous obtenons, par définition, l'expression

$$\int_{K} (Pdx + Qdy),$$

qui est le symbole général d'une intégrale curviligne.

Examinons en particulier le cas d'un contour C fermé sans point multiple.

Le tour de ce contour peut se faire dans le *sens direct* ou dans le *sens rétrograde*. Le sens direct est celui de la rotation de l'axe des x positifs vers celui des y positifs. Ordinairement c'est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre et il laisse l'origine à gauche. Dans ce cas, le sens direct sur le contour C sera celui que laisse à gauche l'intérieur du contour.

Dans le cas d'un contour fermé C, on convient de représenter par la notation

$$\int_C \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$$

l'intégrale effectuée dans le sens direct.

Il peut arriver que le contour C renferme dans sa composition des segments de droites parallèles à l'axe des x ou parallèles à celui des y. On étend la définition à ce cas en considérant comme nulle l'intégrale de Pdx sur une parallèle à l'axe des y et aussi celle de Qdy sur une parallèle de l'axe des x. Cette convention est naturelle, x étant constant et dx nul dans le premier cas, y constant et dy nul dans le second.

Si x et y sont des fonctions d'une variable indépendante t qui varie de t_0 à T quand le point x, y décrit le contour C, et si ces fonctions ont des dérivées, chacune des intégrales effectuées par rapport à x ou par rapport à y qui entre dans la définition de l'intégrale curviligne, peut se transformer en prenant t comme nouvelle variable d'intégration. L'intégrale curviligne peut donc se transformer en une intégrale ordinaire effectuée par rapport à t, ce qui donne

$$\int_C (\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy) = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{P}\frac{dx}{dt} + \mathrm{Q}\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

Green a fait usage d'une formule importante qui ramène une intégrale double à une intégrale curviligne et à laquelle on a donné son nom. Nous allons la faire connaître.

Considérons un domaine D limité par un contour fermé C. Supposons d'abord que ce contour (fig. 1) se compose de deux arcs de courbes RS et PQ et de deux parallèles à l'axe des y, RP et SQ. Les ordonnées y_1 et y_2 ($y_2 > y_1$) des deux courbes sont supposées fonctions continues de x dans l'intervalle (a, A) correspondant aux deux arcs considérés. Nous admettons d'ailleurs que les deux arcs puissent se rejoindre par leurs extrémités, auquel cas l'une des droites du contour C ou toutes les deux disparaîtront. Soit alors P(x, y) une fonction continue ainsi que sa dérivée $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$ dans le domaine D. On aura, par la formule du n° 8,

Fig. 1.

$$\int\int_D \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dxdy = \int_a^{\mathrm{A}} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dy = \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{P}(x, y_2)\, dx - \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{P}(x, y_1) dx$$

Ces deux dernières intégrales simples sont des intégrales curvilignes. La première est effectuée sur l'arc PQ le seconde sur l'arc RS. Il vient donc

$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int_{QP} P\, dx - \int_{RS} P dx.$$

Or je dis que ce résultat peut s'écrire encore

$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int_C P dx.$$

En effet, quand on suit le contour C dans le sens direct, on parcourt successivement les deux arcs RS et QP et les deux droites SQ et PR ; mais, l'intégrale étant nulle sur ces deux droites, il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

La formule précédente s'étend sans peine à une aire D entourée par un contour C de forme quelconque, pourvu que ce contour satisfasse aux conditions ordinaires (n° 1). En effet, on peut alors par des transversales décomposer D en morceaux D_1, D_2,... limités par des contours semblables à celui sur lequel nous venons de raisonner. L'intégrale double dans chaque morceau se ramène à une intégrale curviligne. En faisant la somme de ces intégrales doubles, on obtiendra l'intégrale dans D. D'autre part, la somme de ces intégrales curvilignes se réduira à l'intégrale sur C, car celles qui sont prises sur les transversales disparaissent. En effet, chaque transversale est parcourue deux fois en sens contraire suivant qu'on la considère comme frontière de l'un ou de l'autre des deux morceaux qu'elle sépare, et les deux intégrales correspondantes se détruisent.

Soit maintenant Q (x, y) une autre fonction continue dans l'aire D ainsi que sa dérivée $\frac{\partial Q}{\partial x}$; la formule

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_C Q dy$$

s'établit comme la précédente. En retranchant les deux équations l'une de l'autre, il vient enfin

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P dx + Q dy.$$

Telle est la *formule de Green*. Elle ramène le calcul de l'intégrale double dans D à celle d'une intégrale effectuée sur le contour de l'aire.

Nous avons déjà rencontré dans la première partie du cours certaines applications de cette formule. Posons $Q = x$ et $P = -y$; il viendra

$$\int_C (x\,dy - y\,dx) = 2\iint_D dy\,dx = 2\,D.$$

C'est l'une des formules qui expriment l'aire D intérieure au contour C par une intégrale sur le contour. Les deux autres

$$D = -\int_C y\,dx = \int_C x\,dy$$

s'obtiennent d'une manière analogue en posant $Q = 0$, $P = -y$ ou $Q = x$, $P = 0$.

13. Intégrales triples. — Les considérations précédentes s'étendent à un système de trois variables x, y, z. On est ainsi conduit à la notion des *intégrales triples*. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants, les démonstrations se faisant comme pour les intégrales doubles :

Faisons varier le point x, y, z dans un prisme rectangulaire R, borné par les valeurs a et A de x, b et B de y, c et C de z. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue de x, y, z dans ce domaine, ou, plus généralement, une fonction bornée dont les points de discontinuité se répartissent sur un nombre limité de surfaces *planes* ou *courbes* appelées *surfaces de discontinuité*. Les surfaces *courbes* sont d'ailleurs soumises à certaines restrictions. Il faut qu'en les coupant par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, le système de *lignes de discontinuité* qui en résulte satisfasse aux conditions imposées jusqu'ici à ces lignes dans le plan de deux variables.

Ceci posé, formons l'expression, bien déterminée :

$$(1) \qquad \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z)\,dz$$

qui résulte de trois intégrations consécutives, la première par rapport à z en considérant x, y comme constants, la deuxième par rapport à y en considérant x comme constant, la troisième par rapport à x. Cette expression est une *intégrale triple étendue au domaine* R.

On peut la définir aussi comme une limite de sommes :

L'intégrale triple dans R est la limite commune des deux sommes

$$\Sigma\, m_i\, \alpha_i\,, \quad \Sigma\, M_i\, \alpha_i\,,$$

obtenues en décomposant le domaine R en éléments infiniment petits α_i *par trois systèmes de plans, respectivement parallèles aux plans coordonnés, et en faisant la somme de tous ces éléments multipliés respectivement par les limites inférieures* m_i *et supérieures* M_i *de* $f(x, y, z)$ *dans chacun d'eux.*

L'ordre des variables n'intervient plus dans cette définition, d'où le théorème :

Si l'on intègre successivement une même fonction $f(x, y, z)$ *par rapport aux trois variables* x, y, z *entre des limites constantes, le résultat ne dépend aucunement de l'ordre dans lequel on effectue ces trois intégrations.*

La définition de l'intégrale triple s'étend aussi à un domaine D limité par une surface fermée de forme quelconque qui en fait la frontière. Toutefois, pour que la précédente théorie des intégrales doubles puisse se généraliser, il faut assigner des restrictions à cette frontière.

Supposons que l'on coupe le domaine D par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, par exemple par le plan d'ordonnée z. Les points du domaine D qui appartiennent au plan z forment un domaine à deux variables x, y, que l'on appelle *la section* du domaine D par le plan z. Nous admettons que le contour de cette section satisfait aux conditions que nous avons imposées précédemment à la frontière d'un domaine à deux variables et qu'il en est de même pour toute autre section parallèle à l'un des plans coordonnés.

L'intégrale triple de $f(x, y, z)$ *dans un domaine* D *de forme quelconque est la limite commune des deux sommes* $\Sigma M_i \alpha_i$ *et* $\Sigma m_i \alpha_i$, *que l'on obtient en décomposant* D *en volumes infiniment petits en tous sens* α_i *par des surfaces quelconques, et en faisant la somme de ces éléments* α_i , *multipliés respectivement par les limites supérieures* M_i *et inférieures* m_i *de* $f(x, y, z)$ *dans chacun d'eux. Cette limite se désigne par*

$$(2) \qquad \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Le *théorème de la moyenne* s'étend aux intégrales triples. Nous en énoncerons seulement le cas particulier suivant. Si l'on désigne par D le volume du domaine d'intégration et par μ une valeur moyenne de f dans ce domaine, on peut écrire

$$(3) \qquad \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mu D.$$

En particulier, si $f = 1$, il vient

(4) $$D = \iiint_D dx\,dy\,dz,$$

ce qui donne l'*expression générale d'un volume* sous forme d'intégrale triple.

14. Réduction des intégrales triples. — Considérons l'intégrale étendue à un domaine de forme quelconque

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Cette intégrale se ramène aisément à une autre prise dans un domaine prismatique. Soient a et A les valeurs extrêmes de x, b et B celles de y, c et C celles de z dans le domaine D. Le prisme R borné par ces trois couples de valeurs contiendra le domaine D. Donc, si l'on désigne par f_1 une fonction égale à f en tout point de D et à zéro en dehors, on aura

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f_1(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

L'intégrale dans R se calcule par trois intégrations simples consécutives effectuées par rapport à x, y, z dans un ordre arbitraire. On peut, par exemple, la réduire à

(5) $$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f_1(x, y, z)\,dz.$$

Considérons le résultat des deux premières intégrations :

$$\int_b^B dy \int_c^C f_1(x, y, z)\,dz.$$

C'est une intégrale double étendue à un rectangle et dans laquelle on regarde x comme constant. On peut remplacer cette intégrale double par une autre portant sur la fonction f. Il suffit, pour cela, de réduire le champ d'intégration au domaine dans lequel $f = f_1$. Ce domaine n'est autre que la section du domaine D par le plan x ; en la désignant par S_x, l'intégrale précédente devient

$$\iint_{S_x} f(x, y, z)\,dy\,dz$$

et l'intégrale triple prend la forme

(6) $$\int_a^A dx \iint_{S_x} f(x, y, z)\,dy\,dz.$$

L'intégrale double pouvant se calculer par deux intégrales simples effectuées par rapport à y et à z, l'intégrale triple se ramènera donc à trois intégrations consécutives sur la fonction f.

C'est ce qu'on exprime par la relation générale

$$(7) \qquad \iiint_D f\,dx\,dy\,dz = \int dx \int dy \int f dz$$

La première intégration est effectuée par rapport à z, on suppose x, y donnés et l'intégration s'étend aux valeurs de z pour lesquelles le point (x, y, z) appartient à D. La seconde intégration s'étend aux valeurs de y pour lesquelles (x étant donné) la droite x, y rencontre D, la troisième à toutes les valeurs de x auxquelles correspondent des points de D.

On peut permuter les intégrations, mais il faut aussi permuter les lettres dans la règle précédente, ce qui entraînera généralement une modification des limites.

§ 2. Déterminants fonctionnels. Transformation des intégrales doubles.

15 Déterminant fonctionnel ou jacobien. — Soient u, v deux variables indépendantes, x, y deux fonctions :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

continues ainsi que leurs dérivées partielles premières. Le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

se nomme *déterminant fonctionnel* ou *jacobien* de x, y par rapport à u, v. Il se présente par le symbole

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

qui rappelle la notation des dérivées. Et, en effet, nous allons voir que le déterminant fonctionnel possède des propriétés analogues à celles de la dérivée. Nous signalerons les suivantes :

I. Les variables u, v peuvent être elles-mêmes des fonctions de

deux nouvelles variables indépendantes u', v', admettant aussi des dérivées partielles continues, auquel cas on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u'} & \frac{\partial x}{\partial v'} \\ \frac{\partial y}{\partial u'} & \frac{\partial y}{\partial v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

et, d'après la règle de la multiplication des déterminants,

$$\frac{d\,(x, y)}{d\,(u', v')} = \frac{d\,(x, y)}{d\,(u, v)}\,\frac{d\,(u, v)}{d\,(u', v')}.$$

Cette formule est analogue à celle de la dérivation des fonctions de fonctions.

II. Quand $u' = x$ et $v' = y$, il vient

$$1 = \frac{d\,(x, y)}{d\,(u, v)}\,\frac{d\,(u, v)}{d\,(x, y)}.$$

Donc le jacobien de x, y par rapport à u, v est l'inverse de celui de u, v par rapport à x, y, ce qui rappelle la règle de dérivation des fonctions inverses.

Cette règle suppose évidemment l'existence des fonctions inverses u, v de x, y. Mais on peut s'en assurer par le théorème suivant :

III. Si les fonctions x, y prennent les valeurs x_0, y_0 au point u_0, v_0 et que leur jacobien J ne s'annule pas en ce point, on peut réciproquement considérer u, v comme des fonctions de x, y, continues dans le voisinage du point x_0, y_0 et qui prennent les valeurs u_0, v_0 au point x_0, y_0. Ces fonctions sont simples et admettent des dérivées partielles.

C'est l'application du théorème du n° 144 de la première partie du cours.

La définition du jacobien s'étend à un nombre quelconque de fonctions x_1, x_2,... x_n du même nombre de variables indépendantes u_1, u_2,... u_n. On pose

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{d\,(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d\,(u_1, u_2, \ldots u_n)}$$

Les propriétés I, II, III se généralisent évidemment d'elles-mêmes.

IV. Voici encore une propriété qui généralise la règle de dérivation des fonctions composées. Soient x et y deux fonctions données de ξ, η, ζ :

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Si ξ, η, ζ dépendent de deux variables u, v, les variables x et y sont des fonctions composées de u, v. On a

$$(1) \quad \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}$$

Il y a autant de termes dans le second membre que de combinaisons des lettres ξ, η, ζ deux à deux. Comme cette formule s'étend facilement à des séries plus nombreuses de variables, nous allons en donner une démonstration facile à généraliser.

Remplaçons d'abord, dans $d(x, y) : d(u, v)$, x seul par $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, donc $\dfrac{dx}{du}$ par $\dfrac{d\varphi}{d\xi} \dfrac{d\xi}{du}$, $+ \ldots$ etc. Ce déterminant se décompose en une somme d'autres :

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d(\xi, y)}{d(u, v)} + \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d(\eta, y)}{d(u, v)} + \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d(\zeta, y)}{d(u, v)}.$$

C'est une expression linéaire des déterminants fonctionnels de (ξ, y), (η, y), (ζ, y). Remplaçons maintenant dans ceux-ci y par $\psi(\xi, \eta, \zeta)$; ils vont s'exprimer à leur tour linéairement au moyen de ceux de (ζ, η), (η, ζ), (ζ, ξ), car ceux de (ξ, ξ),... sont nuls. Portons ces valeurs dans l'expression précédente, il vient

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \mathrm{A} \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} + \mathrm{B} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \mathrm{C} \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}$$

Dans cette équation, les paramètres A, B, C ne dépendent que des fonctions φ et ψ et non de u, v. On peut donc les déterminer pour des valeurs particulières de u, v. On trouve immédiatement A en posant $u = \xi$, $v = \eta$, et $\zeta = const.$, ce qui réduit le second membre à A ; B et C se déterminent d'une manière analogue, et l'on obtient la formule **(1)**.

16. Correspondance de deux aires D et D' ; uniforme ; directe ou inverse. Calcul d'une aire en coordonnées curvilignes. Rapportons les variables u, v à deux axes rectangulaires Ou et Ov ; les variables x, y à deux axes rectangulaires Ox et Oy. Les formules

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

que nous supposons vérifier les conditions du n° précédent, établissent un certain mode de correspondance entre les points du plan uv et ceux du plan xy. Nous supposons qu'elles font correspondre les points d'une aire D' intérieure à un contour C' dans le plan xy à ceux d'une aire D intérieure à un contour C dans le plan uv.

La correspondance sera *uniforme* si à tout point de D correspond un point de D' et un seul, à tout point de D' un point de D et un seul. En d'autres termes, elle sera uniforme si à tout contour fermé décrit par le point (u, v) correspond un contour fermé décrit par le point (x, y) et réciproquement. Il est clair que les contours C et C' des deux aires se correspondront alors en particulier. On trouvera au nº 17 un théorème général relatif à l'uniformité de la correspondance de deux aires.

La correspondance est *directe* si les points correspondants (u, v) et (x, y) décrivent en même temps leurs contours fermés dans le même sens (direct ou rétrograde) ; elle sera *inverse* si les sens des parcours sont opposés pour ces deux points. Cette définition suppose évidemment que le mode de correspondance est le même pour tous les contours fermés possibles.

Le mode de correspondance dépend du déterminant fonctionnel

$$J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

L'examen approfondi de cette dépendance exige une analyse assez abstraite qu'on trouvera dans le nº suivant. Nous supposerons seulement ici que le déterminant J ne change pas de signe dans l'aire D et que la correspondance des deux aires D et D' est uniforme. Proposons-nous d'évaluer l'aire D' par une intégrale étendue à D. A cet effet, nous allons nous appuyer sur l'expression connue (nº 12) de l'aire D' par une intégrale curviligne :

$$D' = \int_{C'} x dy.$$

Celle-ci se réduit à une intégrale ordinaire en considérant u, v et, par suite, x, y comme des fonctions d'une variable indépendante t qui varie de t_0 à T quand le point u, v décrit le contour C et le point x, y le contour C'. Nous supposons que x, y décrit C' dans le sens direct, alors on a

$$D' = \int_{C'} x dy = \int_{t_0}^{T} x \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_0}^{T} x \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt.$$

La dernière intégrale est la transformée en t de l'intégrale curviligne sur C

$$\pm \int_C x \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right).$$

Il faut prendre le signe + si les points x, y et u, v marchent tous deux dans le sens direct et le signe — si u, v marche dans le sens rétrograde.

Cette intégrale est donc aussi égale à D′ et nous allons la transformer par la formule de Green. Posons

$$P = x \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Q = x \frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où, en supposant l'existence et la continuité de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = J.$$

Il viendra

$$D' = \pm \int_C (P du + Q dv) = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv = \pm \iint_D J du dv$$

et, en observant que D′ est positif et que J ne change pas de signe,

$$D' = \pm \iint_D J\, du\, dv = \iint_D |\, J \,|\, du\, dv.$$

C'est la formule que nous voulions obtenir.

La quantité $|\, J \,|\, du\, dv$ sous le signe d'intégration s'appelle l'*élément de l'aire* D′ dans le système de coordonnées curvilignes u, v. La formule précédente est la formule générale pour la quadrature des aires planes en coordonnées curvilignes.

Remarque I. — La manière de déterminer le signe ambigu dans la dernière équation conduit à une conséquence importante. Il faut prendre le signe + ou — suivant que J est positif ou négatif, donc les points (u, v) et (x, y) décrivent les contours C et C′ dans le même sens ou dans des sens contraires suivant que J est positif ou négatif. Comme les mêmes raisonnements peuvent se faire sur une portion quelconque de l'aire D′ et, par suite, sur un contour quelconque, il s'ensuit que *la correspondance des aires* D *et* D′ *est directe ou inverse suivant que* J *est positif ou négatif.*

Remarque II. — La dérivée partielle $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ que nous avons fait intervenir dans nos raisonnements disparaît de la formule finale. On peut donc prévoir que son introduction est artificielle et que les hypothèses faites sur son existence sont inutiles.

Nous ferons remarquer dès maintenant que, si l'on avait exprimé l'aire D′ par l'intégrale de ydx prise dans le sens rétrograde sur C′,

on aurait introduit la dérivée $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$ au lieu de la précédente. Le résultat que nous avons établi ne suppose donc, en réalité, que l'existence et la continuité de l'une seulement de ces deux dérivées partielles. Ceci suffit pour montrer que le résultat subsiste indépendamment de la considération des dérivées secondes. On trouvera ce complément de démonstration au n° 20.

17. Théorème. — *Si le jacobien* J *de* x, y *par rapport à* u, v, *ne s'annule pas dans l'aire* D, *si, de plus, le point* x, y, *lié à* u, v, *décrit dans son plan un contour simple* C' *quand* u, v *décrit le contour* C *de l'aire* D, *les aires* D *et* D' *respectivement intérieures à* C *et à* C' *se correspondent uniformément.*

Désignons provisoirement par Δ le domaine du point x, y quand u, v varie dans le domaine D. Nous allons montrer d'abord que Δ ne peut avoir d'autre frontière que C', et pour cela, que tout point $x_0 y_0$ qui correspond à un point $u_0 v_0$ de l'*intérieur* de D est lui-même *intérieur* à Δ. A cet effet, remarquons que, J n'étant pas nul, u et v sont fonctions continues de x et y et varient dans le voisinage de $u_0 v_0$, donc dans D, quand x et y varient dans un domaine suffisamment petit autour de $x_0 y_0$; donc ce domaine suffisamment petit fait partie du domaine Δ.

Le domaine Δ ayant C' pour unique frontière et ne pouvant s'étendre à l'infini, ne peut être que la partie D' du plan intérieur au contour C'.

Donc les aires D et D' se correspondent. Il est clair que x, y décrit un contour fermé si u, v en décrit un. Pour établir l'uniformité de la correspondance, il reste à montrer que u, v décrit aussi un contour fermé en même temps que x, y.

Supposons, par impossible, qu'une ligne L qui joint deux points distincts $u_0 v_0$ et $u_1 v_1$ de l'aire D ait pour correspondante dans D' une ligne fermée L' partant du point $x_0 y_0$ et y revenant. Nous allons montrer qu'il y a là une contradiction.

Puisque J ne s'annule pas, les variables u, v sont fonctions continues de x, y dans le voisinage de tout point de la ligne L', de sorte que, si l'on déforme L' d'une manière continue, la ligne correspondante L se déforme aussi d'une manière continue. On peut réduire par une déformation continue la ligne L' au seul point $x_0 y_0$, sans en changer les extrémités qui coïncident en ce point. Donc la ligne L devrait se réduire en même temps à un seul point ses extrémités restant fixes aussi, chose impossible, puisque ces extrémités sont distinctes.

18. Changement de variables dans les intégrales doubles. — Soit $f(x, y)$ une fonction de x, y ayant une intégrale bien déterminée dans l'aire D' considérée au n° 16. Proposons-nous de changer de variables dans cette intégrale par les relations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ du

même numéro. Le problème consiste à remplacer l'intégrale dans D' par une autre équivalente effectuée par rapport à u, v dans l'aire D. Il se résout par la formule

$$\iint_{D'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(\varphi, \psi) \mid J \mid du\, dv.$$

Nous allons la démontrer.

Décomposons l'aire D en éléments infiniment petits α_i par des transversales, l'aire D' en éléments infiniment petits α'_i par les transversales qui correspondent aux précédentes. Soient m_i et M_i les limites de $f(x, y)$ dans α'_i ou de $f(\varphi, \psi)$ dans α_i ; il vient, par le théorème de la moyenne (n° 11),

$$m_i \iint_{\alpha_i} \mid J \mid du\, dv < \iint_{\alpha_i} \mid J \mid f(\varphi, \psi)\, du\, dv < M_i \iint_{\alpha_i} \mid J \mid du\, dv.$$

Les deux membres extrêmes ont respectivement pour valeurs $m_i\alpha'_i$ et $M_i\alpha'_i$ par la formule du n° 16. Donc, si l'on somme toutes les inégalités comprises dans les précédentes, il vient

$$\Sigma\, m_i\alpha'_i < \iint_{D} \mid J \mid f(\varphi, \psi)\, du\, dv < \Sigma\, M_i\alpha'_i.$$

Or les deux membres extrêmes, par définition, ont pour limite commune l'intégrale de $f(x, y)$ dans D'. Cette intégrale est donc égale au terme du milieu, ce que nous voulions démontrer.

D'où la règle est la suivante :

Pour changer de variables dans une intégrale double, il faut remplacer x et y par leurs valeurs en fonctions des nouvelles variables u, v et l'élément d'aire $dxdy$ par l'élément d'aire dans le système de coordonnées u, v. On remplace le domaine d'intégration relatif à x, y par celui qui lui correspond dans le plan uv.

19. Transformation en coordonnées polaires. — C'est un cas particulier de la transformation générale du n° précédent. Le passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires se fait par les formules

$$x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi.$$

Le jacobien a pour valeur

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

La formule de transformation d'une intégrale par rapport à x, y en une autre par rapport à r, φ, sera donc

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

les domaines d'intégration se correspondant.

20. Généralisation de la démonstration relative au changement des variables. — La démonstration donnée au n° 18 s'appuie sur celle du n° 16 et suppose, comme nous l'avons expliqué, que l'une au moins des deux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ ou $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ soit déterminée et continue.

Nous allons faire disparaître cette restriction.

Reprenons encore une fois les formules

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

qui font correspondre uniformément les aires D et D' des plans uv et xy. Nous supposons seulement que les dérivées premières de x, y par rapport à u, v sont déterminées et continues et que le jacobien J ne change pas de signe dans l'aire D et ne s'annule pas.

Je dis d'abord que l'on pourra décomposer l'aire D en parties α_i suffisamment petites pour que, dans chacune d'elles, l'une au moins des deux dérivées premières $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ ne s'annule pas. Sinon, comme ces dérivées sont continues, on démontrerait par un raisonnement bien connu qu'il existe dans l'aire D un point au moins où les deux dérivées s'annulent à la fois et le jacobien J s'annulerait aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons une de ces parties α, et soit α' l'aire qui lui correspond uniformément dans le plan xy. Nous allons admettre que ce soit la dérivée $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ qui ne s'annule pas dans α et prouver que l'on aura

$$\iint_{\alpha'} f(x, y)\, dx dy = \iint_{\alpha} f(\varphi, \psi)\, |\, \mathrm{J}\, |\, du\, dv.$$

A cet effet, nous allons faire le changement de variables (1) en deux fois. Nous poserons d'abord

$$(2) \qquad u' = \varphi(u, v), \qquad v' = v.$$

On peut tirer de la première équation la valeur de u en fonction u', v. Soit $\psi_1(u', v')$ ce que devient $\psi(u, v)$ quand on y remplace u par cette valeur puis v par v'. On aura

$$(3) \qquad x = u' \qquad y = \psi(u, v) = \psi_1(u', v')$$

Les formules (2) et (3) définisent donc deux substitutions qu'il suffit de faire l'une après l'autre pour effectuer la substitution (1).

Le jacobien de la substitution (2) est

$$\frac{d(u', v')}{d(u, v)} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

et ne s'annule pas dans α. Celui de la substitution (3) ou de x, y par rapport à u', v' ne s'annule pas non plus, en vertu de la relation

$$(4) \qquad J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(u', v')} \; \frac{d(u', v')}{d(u, v)}$$

dont le premier membre n'est pas nul.

Soit α'' l'aire dans laquelle varie le point u', v' quand u, v varie dans α. Les aires α'' et α ainsi que les aires α'' et α' se correspondent uniformément. En effet, il est clair que u', v' décrit un contour fermé avec u, v et x, y un contour fermé avec u', v'. Mais la réciproque a lieu. En effet, si u', v' décrivait un contour fermé sans que u, v en décrivît un, le point x, y décrirait un contour fermé dans les mêmes conditions, ce qui est contre l'hypothèse. Donc α'' correspond uniformément à α. Si x, y décrivait un contour fermé sans que u', v' en décrivît un, le point u, v décrirait en même temps une ligne non fermée en vertu de la conclusion précédente, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Donc α'' correspond uniformément à α'.

Ceci posé, la formule de transformation

$$\iint_{\alpha'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\alpha''} f(x, y) \left| \frac{d(x, y)}{d(u', v')} \right| du'\, dv'$$

ne peut soulever d'objection, car la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v}$ est nulle et, par le fait, déterminée et continue. Il en est de même pour la formule

$$\iint_{\alpha''} f(x, y) \left| \frac{d(x, y)}{d(u', v')} \right| du' dv' = \iint_{\alpha} f(x, y) \left| \frac{d(x, y)}{d(u', v')} \right| \left| \frac{d(u', v')}{d(u, v)} \right| du\, dv,$$

car c'est maintenant $\frac{\partial^2 u'}{\partial u \partial v}$ qui s'annule. Enfin la comparaison de ces deux formules donne, eu égard à (4),

$$\iint_{\alpha'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\alpha} f(x, y) \mid J \mid du\, dv.$$

On a autant de relations semblables qu'on a formé de parties α_i dans l'aire D. En les additionnant, il viendra

$$\iint_{D'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(x, y) \mid J \mid du\, dv$$

La formule de transformation est donc établie dans le cas général. Posons $f = 1$ dans cette formule, elle donne, en particulier,

$$D' = \iint_{D'} dx\, dy = \iint_{D} \mid J \mid du\, dv$$

La formule établie au n° 16 subsiste donc en général.

EXERCICES.

1. Si l'on pose $F(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy$, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = f(X, Y).$$

Réciproquement, si F satisfait à la seconde équation, on a

$$\int_a^X dx \int_a^Y f(x, y)\, dy = F(X, Y) - F(a, Y) - F(X, b) + F(a, b).$$

Etendre ces résultats à trois variables.

2. En considérant une intégrale double dans un triangle, démontrer que

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

3. Soit A une région du plan limitée par deux courbes de niveau d'une fonction continue $f(x, y)$, c'est-à-dire par deux lignes sur lesquelles f garde respectivement les valeurs constantes f_1 et f_2 $(f_1 < f_2)$. On suppose que l'on trace les lignes de niveaux intermédiaires, que toutes ces lignes soient fermées et que l'on sache calculer l'aire E comprise dans l'intérieur de chaque ligne (f). Soient E_1 et E_2 les valeurs de E pour les lignes extrêmes, on aura, selon qu'on considérera E comme fonction de f ou bien f comme fonction de E,

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{E_1}^{E_2} f dE = \Big[Ef \Big]_1^2 - \int_{f_1}^{f_2} E\, df.$$

R. Considérons f comme fonction de E ; soit ΔE la portion du plan comprise entre deux lignes successives (f) et $(f + \Delta f)$, la valeur de l'intégrale double dans ΔE est $f' \Delta E$ où f' est une valeur intermédiaire de f dans ΔE. Donc, en faisant tendre les ΔE vers 0, il vient

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \lim \Sigma f' \Delta E = \int_{E_1}^{E_2} f(x, y)\, dE.$$

4. *Coordonnées elliptiques.* Considérons les coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

où λ est un paramètre arbitraire. Par tout point du plan passent deux coniques de cette espèce, une ellipse et une hyperbole, car, pour chaque système x, y, cette équation à deux racines positives λ et μ comprenant c^2. Les quantités λ, μ sont les coordonnées elliptiques du point x, y. Montrer que l'on a

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c},$$

$$\frac{d(x, y)}{d(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

Etudier le mode de correspondance des aires x, y et λ, μ.

5. Déterminer deux fonctions P et Q de deux variables x et y de façon que l'intégrale curviligne

$$\int P(x + \alpha, y + \beta)\, dx + Q(x + \alpha, y + \beta)\, dy,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, soit indépendante des constantes α et β et ne dépende que du contour lui-même.

R. Transformant en intégrale double par la formule de Green, on remarque que $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ doit se réduire à une constante k. Il est facile d'en déduire les expressions générales de P et de Q.



§ 3. Aires des surfaces courbes. Intégrales de surface.

21. Première définition de l'aire d'une surface. Elément de surface. — Les surfaces que l'on rencontre dans les applications possèdent un plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue avec la position du point de contact. Nous ne voulons considérer que celles-là dans le chapitre actuel.

Soit S une portion d'une telle surface limitée par un contour K. Menons un plan P qui ne soit normal à aucun des plans tangents de S. Nous admettons qu'un tel plan existe pour S, car il en existe certainement un pour chaque morceau suffisamment petit de S et, en définissant l'aire de S comme la somme de celles des morceaux, nous n'aurions plus à raisonner que sur un seul de ces morceaux. Autant donc admettre immédiatement que S désigne un de ces morceaux.

Le plan P étant mené, la surface S se projettera sur ce plan dans une aire D, entourée par un contour C qui sera lui-même la projection de K. Les points de la surface se projettent séparément sur ceux de l'aire D, de sorte que la correspondance des points de la surface S et de l'aire D sera uniforme.

Considérons un mode de partage de la surface S en éléments infiniment petits σ_1, σ_2,... σ_n et partageons, en même temps, l'aire D en éléments α_1, α_2,... α_n qui soient les projections des précédents. Désignons, en général, par Z l'angle du plan tangent à la surface avec le plan P, par Z_i la valeur de Z en un point arbitraire de σ_i. Il est

naturel de considérer le quotient $\alpha_i : \cos Z_i$ comme une valeur approchée de l'aire de σ_i, car cette valeur serait exacte si σ_i était une petite surface plane confondue avec son plan tangent. Nous disons donc, quitte à justifier cette définition dans un instant, que $\alpha_i : \cos Z_i$ est un *élément de surface* et que *l'aire* S *est la limite de la somme*

$$\Sigma \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}$$

de tous ces éléments quand ceux-ci tendent vers 0.

Pour justifier cette définition, il faut prouver 1°) que cette limite existe, 2°) qu'elle est indépendante du choix du plan P.

L'existence de la limite apparaît immédiatement en ramenant cette expression à une intégrale double. A cet effet, rapportons la surface S à trois axes rectangulaires Ox, Oy et Oz en prenant le plan P comme plan des xy et mettons l'équation de la surface sous la forme

$$z = f(x, y);$$

l'ordonnée z sera fonction continue de x et de y ainsi que ses deux dérivées partielles $p = f'_x$ et $q = f'_y$. L'angle Z du plan tangent avec le plan xy est le même que celui fait avec Oz par la normale à la surface menée dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz; on a $\cos Z = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, d'où

$$(1) \qquad S = \lim \Sigma \frac{\alpha_i}{\cos Z_i} = \int\int_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \int\int_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Tirons immédiatement parti de cette formule pour faire, en passant, une remarque importante. L'expression de l'aire S par une intégrale double montre bien que, si l'on décompose S en plusieurs morceaux, l'aire totale sera la somme des aires partielles, puisque l'intégrale étendue à toute la projection de S sur le plan xy est égale à la somme des intégrales étendues aux projections de chaque morceau.

Il reste encore à montrer que l'intégrale double de la formule (1) ne dépend pas du choix du plan P, pourvu que la condition relative au plan tangent soit respectée.

Soit donc P′ un second plan faisant avec le premier P un angle θ. L'axe des y étant arbitraire dans le plan P, menons-le suivant l'intersection de P et P′. Faisons alors tourner les axes de l'angle θ autour de Oy de manière à amener le plan des xy en coïncidence

avec P′ et désignons par x', y, z', les nouvelles variables, de sorte que le plan P′ sera celui des $x'y$. On aura

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta,$$

$$\frac{d(x', y)}{d(x, y)} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \theta + p \sin \theta.$$

La surface S se projette sur une aire D′ du plan P′ des $x'y$ et les points des deux aires D et D′ se correspondent uniformément. Donc, si l'on transforme l'intégrale (1) en prenant x', y comme nouvelles variables, il vient, par la propriété II des déterminants fonctionnels (n° 15),

$$S = \iint_{D'} \frac{d(x, y)}{d(x', y)} \frac{dx'dy}{\cos Z} = \iint_{D'} \frac{dx'dy}{\cos Z (\cos \theta + p \sin \theta)}.$$

Mais ce dernier dénominateur n'est autre chose que le cosinus de l'angle Z′ que fait la normale à la surface avec le plan P′. En effet, en posant $\Delta = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, les cosinus directeurs de la normale par rapport aux anciens axes sont $-p : \Delta$, $-q : \Delta$, $1 : \Delta$, ceux de Oz' sont $-\sin \theta$, 0 et $\cos \theta$, de sorte qu'en faisant la somme de leurs produits deux à deux, il vient

$$\cos Z' = \frac{p \sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \cos Z (\cos \theta + p \sin \theta),$$

par conséquent,

$$S = \iint_{D'} \frac{dx'dy}{\cos Z'}.$$

Donc S est défini par rapport au plan P′ comme par rapport à P. C'est ce que nous voulions démontrer.

La quantité qui se trouve sous le signe intégral dans la formule (1) s'appelle l'*élément de surface* dans le système de coordonnées x, y. On le désigne par $d\sigma$. On a donc

$$d\sigma = \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Nous allons donner une seconde définition de l'aire d'une surface, que nous ferons reposer sur la première, mais qui aura l'avantage de mettre par elle-même en évidence que l'aire ne dépend que de la forme de la surface. A cet effet, nous remarquons d'abord le théorème suivant :

22. Theorème. — *L'aire d'une portion* S *de surface dont les points se projettent séparément sur un plan* P, *est égale au quotient de la projection de* S *sur ce plan par le cosinus de l'angle que fait avec* P *l'un des plans tangents à* S.

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème de la moyenne à l'intégrale double qui représente S. Cette intégrale étant étendue à l'aire D de la projection de S sur le plan P pris comme plan des xy, il vient, ζ étant une valeur moyenne de l'angle Z,

$$S = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \frac{D}{\cos \zeta}.$$

23. Deuxième définition de l'aire d'une surface. — *L'aire d'une portion* S *de surface est la limite de la somme des projections de tous les éléments de* S *sur un de leurs plans tangents respectifs, quand on décompose* S *en parties qui décroissent indéfiniment dans tous les sens.*

Soit, en effet, σ_i un des éléments de la surface et α_i sa projection sur un de ses plans tangents. Appliquons le théorème précédent, il viendra, ζ_i désignant l'angle du plan de projection de σ_i avec un autre plan tangent à ce même σ_i,

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i}, \quad \text{d'où} \quad S = \Sigma \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i}.$$

Mais les angles ζ_i sont ceux de deux plans tangents à un même élément; ils tendent uniformément vers zéro avec ces éléments et leurs cosinus vers l'unité. On peut négliger ces cosinus sans changer la limite de la somme précédente, et il vient $S = \lim \Sigma\, \alpha_i$.

24. Troisième définition de l'aire d'une surface. — On peut encore modifier la définition précédente. La projection de chacun des éléments σ_i sur un plan variable atteint son maximum β_i pour une certaine inclinaison de ce plan. D'ailleurs β_i ne peut surpasser σ_i en vertu du théorème du n° 22 ni être moindre que α_i par définition. On peut donc poser

$$\sigma_i \geqq \beta_i \geqq \alpha_i.$$

Faisons la somme de toutes les inégalités semblables et passons à la limite ; il vient

$$S \geqq \lim \Sigma\, \beta_i \geqq S.$$

Donc $S = \lim \Sigma\, \beta_i$. D'où la définition suivante :

L'aire d'une portion de surface est la limite de la somme des pro-

jections planes maxima des éléments de cette surface, quand on divise la surface en parties infiniment petites [1].

25. Aire d'une surface en coordonnées curvilignes. Remarques sur le calcul de l'élément d'aire. — Considérons maintenant une surface donnée *en coordonnées curvilignes* ou par une représentation paramétrique :

$$x = \varphi_1(u,v), \qquad y = \varphi_2(u,v), \qquad z = \varphi_3(u,v).$$

Posons

$$A = \frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \qquad B = \frac{d(z,x)}{d(u,v)}, \qquad C = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}.$$

Supposons que ces trois déterminants fonctionnels soient fonctions continues de u, v et ne s'annulent simultanément en aucun point d'une aire Ω du plan uv. Si le point uv décrit l'aire Ω, le point xyz décrit une portion de surface S. En tout point de cette portion de surface, le plan tangent est déterminé, son orientation varie d'une manière continue avec la position du point de contact, et les cosinus directeurs de la normale sont donnés par les équations

$$\frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si la normale est dirigée dans le sens où elle fait un angle aigu avec OZ, le cosinus de cet angle sera positif et l'on aura

$$\cos Z = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Supposons d'abord que C ne s'annule pas dans l'aire Ω, le plan tangent sera partout oblique au plan xy et l'aire de S sera donnée par l'intégrale, étendue à l'aire D du plan xy sur laquelle se projette S,

$$S = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint_D \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}\,dx\,dy.$$

Transformons cette intégrale en une autre étendue à l'aire Ω du plan uv. Le déterminant de la transformation est C. Il vient donc

$$(2) \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv.$$

Si l'un des deux autres déterminants A, B ne s'annulait pas dans Ω, on

[1] Cette nouvelle définition ne fait plus appel à la considération du plan tangent. On conçoit donc qu'on puisse l'étendre à certaines surfaces dénuées de plan tangent. Telles sont les surfaces engendrées par la révolution d'une courbe rectifiable sans tangente. Nous avons donné une autre définition des surfaces de révolution dans la première partie du cours. On montrerait sans peine qu'elle rentre dans la précédente. Nous ne nous arrêterons pas à cette démonstration.

raisonnerait de même sur les plans yz ou zx et l'on retrouverait la même formule. D'ailleurs, dans tous les cas, on peut partager l'aire Ω en plusieurs autres où l'un des trois déterminants ne s'annule pas. Donc la considération des plans coordonnés n'intervient plus dans la formule (**2**). *Cette formule est générale et subsiste quelle que soit l'orientation du plan tangent.*

On transforme souvent la formule (**2**). Posons

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

On aura identiquement $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Donc

$$(\mathbf{2}') \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Les paramètres E, F, G que nous venons d'introduire jouent un rôle important dans la théorie des surfaces. Ajoutons les carrés de dx, dy, dz; il vient

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Donc le carré d'un élément d'arc sur la surface est une forme homogène du second degré en du, dv, ayant $EG - F^2$ pour discriminant.

L'expression positive qui est sous le signe d'intégration double dans les formules (**2**) et (**2'**) s'appelle l'*élément d'aire* de la surface dans le système de coordonnées u, v. On le représente généralement par $d\sigma$. On a donc

$$(\mathbf{3}) \qquad d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

et les formules qui donnent les cosinus directeurs de la normale peuvent s'écrire maintenant, suivant le sens que l'on choisit,

$$(\mathbf{4}) \qquad \frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \pm \frac{du\, dv}{d\sigma}.$$

Remarque. — La détermination de l'aire d'une surface en coordonnées polaires peut être considérée comme un cas particulier des formules précédentes. En effet, les coordonnées polaires sont liées aux coordonnées rectangulaires par les formules

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Cependant quelques considérations très simples de géométrie infini-

tésimale qu'il est facile de rendre tout à fait rigoureuses, conduisent encore plus vite au résultat. Nous allons les faire connaître.

26. Aires en coordonnées polaires. — Soient r le *rayon vecteur* OM d'un point M de l'espace, θ sa *latitude* ou l'angle de OM avec OZ, φ sa *longitude* ou l'angle des plans MOZ et ~~MOX~~ ZOX. Quand M décrit tout l'espace, r varie 0 à ∞, θ de 0 à π et φ de 0 à 2π.

Considérons une portion S d'une surface qui a pour équation

$$r = f(\theta, \varphi)$$

et qui, par hypothèse, ne doit être coupée qu'en un point par le rayon vecteur. Proposons-nous d'évaluer l'aire S par une intégrale relative aux variables θ et φ.

Considérons d'abord une portion de surface sphérique dont le centre est à l'origine et dont le rayon est r. Le cône qui a son sommet à l'origine et qui est limité par les quatre surfaces φ, $\varphi + d\varphi$, θ, $\theta + d\theta$ intercepte sur cette sphère un élément d'aire $d\sigma$, que l'on peut assimiler à un petit carré dont les côtés sont $r\,d\theta$, $r \sin\theta\, d\varphi$ et la surface $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Donc, pour une sphère de rayon r, on a

$$(5) \qquad d\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad S = r^2 \iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Passons au cas de la surface quelconque S. Désignons par (r, n) l'angle (compris entre 0 et 1^d) de la normale avec le rayon vecteur. La surface S coupe, en chaque point (r, θ, φ), la sphère de rayon r sous l'angle (r, n). Donc le cône considéré ci-dessus intercepte sur cette surface un élément de surface $d\sigma$ qui se projette sur celui de la sphère et dont la valeur s'obtient en divisant celui-ci par $\cos(r, n)$.

On a donc, pour une surface quelconque,

$$(6) \qquad d\sigma = \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\cos(r, n)}, \qquad S = \iint \frac{r^2 \sin\theta}{\cos(r, n)}\, d\theta\, d\varphi.$$

Si la surface S est fermée et que le pôle soit à l'intérieur, il viendra, en admettant toujours que le rayon vecteur ne coupe la surface qu'une seule fois,

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \frac{d\theta}{\cos(r,n)},$$

soit $P = r\cos(r,n)$ la distance du pôle au plan tangent; la formule (6) peut aussi s'écrire

$$S = \iint \frac{r^3 \sin\theta}{P}\, d\theta\, d\varphi.$$

27. Définition des intégrales de surface. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue de x, y, z, pour tous les points d'une portion S de surface. Décomposons S en éléments infiniment petits d'aires σ_1, $\sigma_2, \ldots \sigma_n$ et désignons par (ξ_i, η_i, ζ_i) un point arbitraire de l'élément σ_i. Formons la somme, étendue à tous les éléments,

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma_i.$$

Cette somme tend vers une limite déterminée que l'on représente par

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma$$

et que l'on appelle l'intégrale de $f(x, y, z) d\sigma$ étendue à la surface S.

Montrons, en effet, que cette expression se réduit à une intégrale double ordinaire.

Supposons d'abord que le plan tangent soit oblique au plan xy dans toute l'étendue de S. L'équation de S pourra se mettre sous la forme

$$z = \varphi(x, y).$$

La portion S de surface se projettera sur une aire D du plan xy dont les points correspondent uniformément à ceux de S. Menons la normale à S dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz et soit Z cet angle. Désignons par Z_i la valeur de Z au point arbitraire ξ_i, η_i, ζ_i de σ_i. Comme $\zeta_i = \varphi(\xi_i, \eta_i)$, on a, par définition même d'une intégrale double (n° 10),

$$\iint_D f\left[x, y, \varphi(x, y)\right] \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \lim \Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}.$$

Portons notre attention sur cette limite de sommes.

On sait (n° 22) que σ_i est égal à $\alpha_i : \cos \zeta_i$ où ζ_i est la valeur de Z en un certain point de σ_i. Comme les quotients $\cos Z_i : \cos \zeta_i$ tendent uniformément vers l'unité quand les éléments σ_i tendent vers 0, on ne changera pas cette limite de sommes en y remplaçant $\cos Z_i$ par $\cos \zeta_i$, ce qui revient à mettre σ_i à la place de $\alpha_i : \cos Z_i$. Il vient donc, en écrivant z à la place de φ,

$$(7) \quad \iint_D f(x, y, z) \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \lim \Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma_i = \iint_S f(x, y, z) d\sigma.$$

Donc l'intégrale de surface revient à une intégrale double étendue au domaine D dans le plan xy.

Si le plan tangent était partout oblique au plan yz ou au plan xz,

l'intégrale de surface se réduirait de même à une intégrale double dans l'un ou l'autre de ces deux plans.

Comme, en tous cas, on peut partager S en morceaux de telle sorte que le plan tangent soit toujours oblique à l'un au moins des plans coordonnés dans toute l'étendue d'un même morceau, on peut aussi, dans tous les cas, exprimer l'intégrale de surface par une somme d'intégrales doubles.

Si la surface était donnée par une représentation paramétrique, les coordonnées x, y, z seraient fonctions de u, v dans une aire Ω, on pourrait transformer les intégrales précédentes en intégrales effectuées par rapport à u, v comme au nº 25; et il viendrait

$$(8)\quad \iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_\Omega f(x,y,z)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

$$= \iint_\Omega f(x,y,z)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

28. Intégrale étendue à un côté déterminé d'une surface. — Soit S une portion de surface limitée par un contour déterminé qui en forme le bord. Nous supposerons que cette surface a deux côtés distincts. Il faut entendre par là que si l'on regarde S comme un lambeau de surface matérielle d'une épaisseur infiniment petite, mais impénétrable, un point mobile sur cette surface ne peut passer d'un côté à l'autre qu'en faisant le tour par le bord.

Ceci posé, supposons d'abord que le plan tangent à S soit toujours oblique au plan xy ou tout au moins ne lui devienne normal que sur le bord, et mettons l'équation de S sous la forme

$$z = \varphi(x, y).$$

Convenons que la normale ne pourra pas traverser la surface, alors les deux sens de la normale correspondent aux deux côtés de la surface. Dans notre hypothèse, il y aura sur la surface un *côté supérieur* (vers les z positifs) et un *côté inférieur* (vers les z négatifs), auxquels correspondent respectivement une *normale supérieure* et une *normale inférieure*.

Soient R (x, y, z) une fonction continue en tout point de S et D la projection de S sur le plan xy. Considérons l'intégrale de surface

$$\iint_S R\cos Z\,d\sigma,$$

où Z désigne l'angle de la normale avec Oz; suivant que cet angle

sera celui de la normale supérieure ou celui de la normale inférieure, l'intégrale revient à l'une ou à l'autre des deux intégrales doubles

$$\int\int_D \mathrm{R}\,dxdy, \qquad -\int\int_D \mathrm{R}\,dxdy.$$

Nous dirons que l'intégrale de surface s'étend, dans le premier cas, *au côté supérieur*, dans le second *au côté inférieur* de la surface S. Nous conviendrons d'ailleurs de la représenter, dans les deux cas, par le même symbole

$$\int\int_S \mathrm{R}\,dxdy,$$

sous la condition de faire connaître le côté auquel s'étend cette intégrale. Cette connaissance, en effet, suffit pour déterminer celle des deux intégrales doubles étendues à l'aire D du plan xy que représente l'intégrale sur S.

Nous pouvons maintenant faire disparaître les restrictions que nous avions imposées au plan tangent, et considérer une surface de forme quelconque, fermée ou non, pourvu qu'elle ait toujours deux côtés distincts. En effet, il est possible de partager la surface en morceaux, de telle sorte que le plan tangent ne soit normal au plan xy que sur le bord des morceaux ou dans un certain nombre de morceaux tout entiers [1]. Dans ces derniers, l'intégrale de surface sera nulle avec cos Z ; dans les autres, elle est définie par ce qui précède ; enfin l'intégrale étendue à un côté de la surface entière est la somme des intégrales étendues aux côtés correspondants de chaque morceau.

On définira d'une manière analogue les intégrales

$$\int\int_S \mathrm{P}(x, y, z)\,dydz, \qquad \int\int_S \mathrm{Q}(x, y, z)\,dxdz.$$

En faisant la somme de ces intégrales, on obtient l'*expression la plus générale d'une intégrale de surface*, qui est la suivante :

[1] Il est à remarquer toutefois que, dans la décomposition précédente, les lignes de partage de S sont celles sur lesquelles le plan tangent est normal au plan xy, ou bien celles qui limitent les portions cylindriques de S normales à ce plan. Pour qu'on puisse appliquer sans difficulté les théories exposées précédemment, il faut donc admettre que ces lignes sont formées de tronçons consécutifs sur lesquels les variations de x et y ne changent pas de sens. Les théorèmes pourraient évidemment subsister sous des conditions plus générales encore, mais nous ne ferons pas cette généralisation qui présente actuellement peu d'intérêt. Nous admettrons, une fois pour toutes, que la condition précédente est réalisée et nous n'y reviendrons plus dans les théorèmes suivants.

$$\int\int_S (\mathrm{P}dydz + \mathrm{Q}dzdx + \mathrm{R}dxdy).$$

Cette intégrale *étendue à un côté déterminé de la surface* S revient à

$$\int\int_S (\mathrm{P}\cos \mathrm{X} + \mathrm{Q}\cos \mathrm{Y} + \mathrm{R}\cos \mathrm{Z})d\sigma,$$

où cos X, cos Y, cos Z sont les cosinus directeurs de la normale à ce côté de la surface.

L'analogie est complète entre les intégrales de surface dans l'espace et les intégrales curvilignes dans le plan. Considérons une courbe C dans le plan xy et sur laquelle on peut distinguer deux côtés, par suite aussi deux normales. Nous pouvons désigner par α l'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à C menée dans un sens déterminé. Ceci posé, dans l'intégrale curviligne effectuée dans ce sens

$$\int_C \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy,$$

dx sera égal à $ds\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$ et dy à $ds\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$ suivant la normale qu'on considèrera. Donc, si l'on prend s comme variable, l'intégrale curviligne prendra l'une des formes

$$\int_C (\mathrm{P}\sin\alpha - \mathrm{Q}\cos\alpha)\,ds, \qquad -\int_C (\mathrm{P}\sin\alpha - \mathrm{Q}\cos\alpha)\,ds.$$

Donc les deux côtés auxquels on peut mener la normale, ou plus simplement les deux côtés de la courbe, correspondent aux deux sens dans lesquels peut se faire l'intégration.

29. Transformation des intégrales de surface. — Considérons une intégrale étendue à un côté déterminé d'une surface S

$$\int\int_S \mathrm{P}\,(x, y, z)\,dx\,dy$$

et supposons que les formules de transformation :

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

fassent correspondre uniformément les points d'une surface S dans l'espace xyz et ceux d'une autre surface Σ dans l'espace $\xi\eta\zeta$. *Le problème de la transformation consiste à remplacer l'intégrale étendue à* S *par une autre étendue à* Σ.

Pour le résoudre, considérons les coordonnées x, y, z et ξ, η, ζ des points correspondants sur les surfaces S et Σ comme des fonctions de deux variables indépendantes u et v qui décrivent une aire Ω dans le plan uv.

Pour la surface S, les cosinus directeurs de la normale vérifient les formules (4) du n° (25), savoir

$$\frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \pm \frac{du\, dv}{d\sigma}; \quad A = \frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \ldots$$

Marquons avec l'indice 1 les quantités analogues pour Σ; on aura

$$\frac{\cos X_1}{A_1} = \frac{\cos Y_1}{B_1} = \frac{\cos Z_1}{C_1} = \pm \frac{du\, dv}{d\sigma_1}; \quad A_1 = \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)}, \ldots$$

Mais la formule (1) du n° (15) peut se mettre sous la forme

$$C = \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} A_1 + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} B_1 + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} C_1,$$

ce qui multiplié par $du\, dv$ devient, à cause des systèmes d'égalités qui précèdent,

$$\cos Z\, d\sigma = \pm \left[\frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} \cos X_1 + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} \cos Y_1 + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \cos Z_1\right] d\sigma_1.$$

D'ailleurs on peut prendre le signe + à condition de mener la normale à Σ du côté convenable. Multiplions encore les deux membres de l'équation précédente par P et intégrons par rapport à u, v dans le domaine Ω. Le résultat pourra s'écrire comme il suit :

$$(9) \quad \iint_S P\, dx\, dy = \iint_\Sigma P \left[\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} d\eta\, d\zeta + \frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)} d\zeta\, d\xi + \frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)} d\xi\, d\eta.\right]$$

C'est la formule de transformation ; l'intégration doit se faire sur Σ du côté convenable (celui de la normale qu'on vient de considérer).

Par une permutation circulaire simultanée des lettres P, Q, R et des lettres x, y, z, on obtiendra deux autres formules analogues qu'il est inutile d'écrire.

Il reste à donner une règle pour fixer le côté d'intégration sur la surface Σ.

Définissons d'abord ce que nous appellerons *côtés correspondants* sur les surfaces S et Σ. Imaginons un point infiniment voisin de S d'un côté de cette surface, son correspondant sera infiniment voisin de Σ d'un certain côté de cette seconde surface. Ce sont ces deux côtés qu'il est naturel de considérer comme correspondants.

On peut alors énoncer la règle suivante, dont nous donnerons la démonstration au n° 32 :

Les deux intégrales de la formule (9) *sont étendues aux côtés correspondants des deux surfaces si le jacobien* J *de* x, y, z *par rapport à* ξ, η, ζ *est positif, aux côtés inverses si* J *est négatif.*

30. Formule de Green pour l'espace. — Soient S une surface fermée et V le volume ou la portion de l'espace qu'elle renferme. Il y aura sur cette surface un côté intérieur et un côté extérieur et, par conséquent, une normale intérieure et une normale extérieure. Soit R (x, y, z) une fonction continue ainsi que sa dérivée $\frac{\partial R}{\partial z}$ dans toute l'étendue du volume V et de la surface S. Nous allons établir, pour commencer, la formule suivante, qui est un cas particulier de celle de Green :

$$(10) \qquad \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R\, dx\, dy.$$

Elle ramène le calcul d'une intégrale triple dans un volume V à celui d'une intégrale double étendue *au côté extérieur* de la surface qui limite ce volume.

Supposons d'abord que la surface S ne soit rencontrée qu'en deux points par une parallèle à l'axe des z; alors la surface S se partage en deux autres S_1 et S_2, l'une inférieure limitant le volume par au dessous, l'autre supérieure limitant le volume par au dessus, et dont nous désignerons respectivement les ordonnées par z_1 et z_2 $(z_1 < z_2)$. Ces deux ordonnées seront des fonctions continues de x et y à l'intérieur du domaine D limité par le contour apparent de S sur le plan xy.

Si l'on effectue une première intégration par rapport à z, il viendra donc

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_D R\,(x, y, z_2)\, dx\, dy - \iint_D R\,(x, y, z_1)\, dx\, dy.$$

Considérons ces deux intégrales doubles avec leur signe. Elle reviennent à des intégrales prises respectivement sur les surfaces S_2 et S_1, mais la première s'étend au côté supérieur et la seconde au côté inférieur. Dans les deux cas, c'est le côté extérieur de la surface S, de sorte que les deux intégrales prises ensemble s'étendent au côté extérieur tout entier de S et l'on trouve la formule (10).

La formule (10) subsiste, si le volume V est limité latéralement par des portions de cylindres parallèles à l'axe des z, séparant l'une de l'autre deux surfaces S_1 et S_2 analogues aux précédentes. En effet, les portions de surfaces parallèles à Oz ne donnent que des intégrales nulles et il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

Enfin la formule (10) subsiste, quelle que soit la surface qui limite

le volume V, car on peut toujours découper le volume V en morceaux limités par des surfaces satisfaisant aux conditions supposées jusqu'ici. On pourra appliquer la formule (**10**) à chaque morceau et, en additionnant les résultats, on trouvera la formule sous sa forme générale. En effet, les intégrales étrangères relatives aux surfaces qui séparent les morceaux, sont étendues successivement aux deux côtés de ces surfaces, car chaque côté est extérieur relativement à l'un des deux morceaux limitrophes. Donc ces intégrales se détruisent.

On établit comme la formule (**10**) les deux formules analogues :

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S P\, dy\, dz, \qquad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Q\, dz\, dx$$

et, en les ajoutant, on trouve la *formule générale de Green*

$$(\mathbf{11}) \qquad \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S P dy\, dz + Q dz dx + R dx\, dy,$$

les intégrales de surfaces étant toujours extérieures.

31. Expressions des volumes par des intégrales de surface. — Si l'on fait $P = x$, $Q = R = 0$ dans la formule précédente, on trouve la première des deux formules suivantes, les autres s'obtenant par analogie :

$$(\mathbf{12}) \qquad V = \iint_S x\, dy\, dz = \iint_S y\, dz\, dx = \iint_S z\, dx\, dy;$$

elles expriment un volume par une intégrale étendue au côté extétérieur de sa surface frontière. En les ajoutant, il vient

$$V = \frac{1}{3} \iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy.$$

D'où, par l'introduction des cosinus directeurs de la normale extérieure,

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos X + y \cos Y + z \cos Z)\, d\sigma.$$

Ce résultat est facile à transformer. Si l'on désigne par (r, n) l'angle de la normale *extérieure* avec le rayon vecteur r issu de l'origine, on a

$$x \cos X + y \cos Y + z \cos Z = r \cos (r, n).$$

D'où, eu égard à la formule (**6**) du n° 26 qui exprime $d\sigma$,

$$(\mathbf{13}) \qquad V = \frac{1}{3} \iint_S r \cos (r, n)\, d\sigma = \frac{1}{3} \iint_S r^3 \sin \theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Cette dernière intégrale s'étend au côté extérieur de S et s'interprète facilement par la précédente.

32. Volumes en coordonnées curvilignes. Détermination de l'élément de volume. — Reprenons les formules de transformation du n° 29

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

et supposons qu'elles fassent correspondre uniformément les points d'un volume V limité par une surface S dans l'espace $x\,y\,z$ et ceux d'un volume Ω limité par une surface Σ dans l'espace $\xi\,\eta\,\zeta$. On aura, en appliquant à l'une des intégrales (**12**) du n° précédent la formule de transformation (**9**) du n° 29,

$$\mathrm{V} = \iint_{\mathrm{S}} z\,dx\,dy = \iint_{\Sigma} z\left[\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}d\eta\,d\zeta + \frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}d\zeta\,d\xi + \frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}d\xi\,d\eta\right].$$

Nous savons que l'intégrale étendue à S l'est au côté extérieur, mais nous ignorons encore sur quel côté est prise l'intégrale étendue à Σ. Nous allons le reconnaître en observant que V doit être positif.

Transformons par la formule de Green l'intégrale étendue à Σ dans une intégrale triple étendue à Ω. Il faut poser :

$$\mathrm{P} = z\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}, \qquad \mathrm{Q} = z\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}, \qquad \mathrm{R} = z\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)},$$

auquel cas, l'on a, en désignant par J le jacobien de la transformation,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} + \ldots = \frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = \mathrm{J},$$

car on vérifie immédiatement que les dérivées secondes se détruisent. La transformation de Green donne donc, en choisissant le signe + ou — suivant que l'intégrale a été étendue au côté extérieur ou au côté intérieur de Σ,

$$(\mathbf{14}) \qquad \mathrm{V} = \pm \iiint_{\Omega} \mathrm{J}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint_{\Omega} |\,\mathrm{J}\,|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

C'est la formule générale pour le calcul des volumes [1].

Si J est > 0, il faut prendre le signe + dans la formule précédente et l'intégrale étendue à Σ l'est au côté extérieur ; de même, si $\mathrm{J} < 0$, cette intégrale s'étend au côté intérieur. Les côtés extérieurs sont con-

[1] Cette démonstration postule l'existence des dérivées secondes de x, y, z. On fera disparaître cette restriction comme dans le cas de deux variables (n° 20). D'autre part, les surfaces S et Σ ont été soumises à des restrictions. Pour étendre la formule (**14**) au cas d'un volume V limité par une surface quelconque, il suffit de l'appliquer à un volume V' satisfaisant aux conditions de la démonstration et de faire tendre V' vers V. La formule subsistera à la limite pourvu seulement que V soit déterminé.

sidérés comme correspondants par définition. Donc les intégrales sur S et sur Σ sont étendues aux côtés correspondants ou aux côtés inverses de ces deux surfaces suivant que J est positif ou négatif.

La règle qui termine le n° 29 est ainsi établie pour deux surfaces fermées. Elle subsiste pour deux portions de surfaces quelconques, car on peut les considérer comme des portions de surfaces fermées.

L'expression $|J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$ sous le signe d'intégration dans la formule (14) s'appelle l'*élément de volume* dans le système de coordonnées ξ, η, ζ. On peut la transformer.

L'élément d'arc $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est une forme homogène du second degré en $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, qu'on peut écrire

$$ds^2 = H_1 d\xi^2 + H_2 d\eta^2 + H_3 d\zeta^2 + 2F_1 d\eta d\zeta + 2F_2 d\zeta d\xi + 2F_3 d\xi d\eta,$$

en posant, en abrégé,

$$H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2, \quad H_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \ldots, \quad H_3 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \ldots,$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad F_2 = \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \ldots, \quad F_3 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \ldots$$

Son discriminant M sera

$$M = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}$$

Or il suffit d'élever J au carré par la règle habituelle de formation du carré d'un déterminant pour obtenir $J^2 = M$.

L'élément de volume est donc égal aussi à $\sqrt{M} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$,

On dit que le système des coordonnées ξ, η, ζ est *orthogonal* si $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Dans ce cas, on a

$$ds^2 = H_1 d\xi^2 + H_2 d\eta^2 + H_3 d\zeta^2$$

et l'élément de volume devient $\sqrt{H_1 H_2 H_3} \, d\xi d\eta d\zeta$.

Le système des *coordonnées polaires dans l'espace* est orthogonal, car des relations

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

on tire directement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

L'*élément de volume en coordonnées polaires* est donc $r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$. Ce résultat est facile à obtenir par des considérations géométriques directes.

33. Transformation des intégrales triples. — Soit à transformer une intégrale triple

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

en une autre étendue à un volume Ω dans l'espace ξ, η, ζ. Les formules de transformation

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

sont supposées établir une correspondance uniforme entre les points des deux volumes V et Ω. On aura

$$(15) \quad \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega f(x, y, z) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

La démonstration est la généralisation immédiate de celle qui a été donnée dans le cas de deux variables (n° 18).

34. Intégrales curvilignes dans l'espace. Formule de Stokes. — La notion des intégrales curvilignes s'étend d'elle-même à l'espace. Décrivons un arc de courbe L sur lequel x varie en croissant ou en décroissant constamment de a à b. Les deux autres coordonnées y et z seront fonctions continues de x entre a et b, de sorte que toute fonction continue P (x, y, z) des trois variables est une fonction composée de x le long de la courbe L. Nous poserons, par définition, le sens du parcours sur L et l'ordre des limites a et b se correspondant,

$$\int_L \mathrm{P}\, dx = \int_a^b \mathrm{P}\, dx.$$

Cette première définition de l'intégrale curviligne s'étend immédiatement à toute ligne L composée de plusieurs segments consécutifs sur chacun desquels x varie dans le même sens ou reste constant (l'intégrale sur le segment étant nulle dans ce dernier cas). Enfin, faisant la somme de trois expressions définies d'une manière analogue, on trouve

$$\int_L (\mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy + \mathrm{R}\, dz),$$

ce qui est le symbole général d'une intégrale curviligne sur la ligne L.

Passons maintenant à la formule de Stokes, qui a pour objet de ramener une intégrale de surface à une intégrale curviligne effectuée sur le contour qui limite la surface.

Soient S une portion de surface limitée par une ligne L et P (x, y, z) une fonction continue de x, y, z sur cette surface. Nous commencerons par établir la formule suivante :

$$(16) \qquad \iint_S \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dx\, dy - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} dx\, dz \right] = \int_L \mathrm{P} dx,$$

qui est un cas particulier de celle de Stokes.

Supposons d'abord que le plan tangent soit oblique au plan xy dans toute l'étendue de S, sauf peut-être sur le bord. La surface S aura un *côté supérieur* et un *côté inférieur* ; elle se projettera sur une aire D du plan xy, bornée aussi par un contour simple C qui sera la projection de L ; enfin l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$z = \varphi(x, y),$$

où φ est une fonction continue admettant des dérivées partielles p et q.

Pour fixer les idées, admettons que l'intégrale de surface de la formule (**16**) s'étende au côté supérieur de S. Soient cos X, cos Y, cos Z les cosinus directeurs de la *normale supérieure* (cos Z > 0) ; on aura (nº 28)

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} dxdy - \frac{\partial P}{\partial z} dxdz\right) = \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos Z - \frac{\partial P}{\partial z} \cos Y\right) d\sigma$$

Mais les cosinus sont proportionnels à $-p$, $-q$ et 1, de sorte que le quotient cos Y : cos Z est égal à $-q$. Il en résulte, en désignant encore par $P_1(x, y)$ ce que devient $P(x, y, z)$ quand on remplace z par $\varphi(x, y)$, que l'intégrale précédente devient successivement

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cos Z \, d\sigma = \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) dxdy = \int\int_D \frac{\partial P_1}{\partial y} dxdy.$$

Donc l'intégrale de surface est réduite à une intégrale double étendue à l'aire D du plan xy. Par la formule de Green (nº 12), celle-ci peut se transformer dans une intégrale curviligne étendue au contour C de l'aire D dans le sens direct (sens de la rotation de Ox vers Oy). Il vient

$$\int\int_D \frac{\partial P_1}{\partial y} dxdy = \int_C P_1 dx = \int_L P dx,$$

car les deux intégrales curvilignes sur C et sur L ont la même signification, pourvu que le parcours sur L se fasse aussi dans le sens de la rotation de Ox vers Oy. Donc l'intégrale sur L est égale à l'intégrale de surface.

La formule (**16**) est ainsi établie dans un cas particulier : l'intégrale de surface s'étend au côté supérieur et l'intégration curviligne se fait en tournant dans le sens de la rotation de Ox vers Oy. Si l'intégrale de surface s'étendait au côté inférieur, la formule subsisterait en renversant le sens de l'intégration curviligne.

Mais on peut comprendre les deux cas dans une seule règle.

Imaginons qu'un observateur placé du côté des z positifs et marchant sur le plan xy, décrive un cercle autour de l'axe Oz en tournant dans le sens de Ox vers Oy ; l'intérieur du cercle sera soit à sa droite soit à sa gauche. Nous dirons, d'une manière générale, qu'un observateur qui marche sur un côté déterminé d'une surface et parcourt un contour fermé tracé sur ce même côté, décrit le contour *dans le sens direct*, si l'intérieur se trouve par rapport à lui du même côté (droit ou gauche)

que le cercle dans le cas de tout à l'heure. D'après cette définition, le sens direct change pour un même contour suivant le côté de la surface où il est tracé. La distinction des deux cas disparaît pour la formule (16) en énonçant la règle suivante : *dans la formule* (16), *l'intégrale curviligne est effectuée dans le sens direct relativement au côté considéré de la surface.*

Pour faire disparaître les restrictions imposées au plan tangent et étendre la formule (16) à une surface S de forme quelconque, mais ayant deux côtés distincts, il suffit de partager la surface en morceaux et de raisonner comme dans le cas de la formule de Green. On aura seulement à considérer des lignes de partage tracées sur la surface au lieu de surfaces de partage. Nous ne recommencerons pas cette démonstration.

Arrivons maintenant à la formule générale de Stokes.

Soient P, Q, R trois fonctions continues de x, y, z ainsi que leurs dérivées. On obtiendra deux autres formules analogues à (16) par une permutation circulaire simultanée des lettres P, Q, R et x, y, z. En ajoutant les trois formules on trouve

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dzdx \\ &\qquad\qquad = \int_L P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule générale de Stokes, l'intégrale curviligne doit être effectuée *dans le sens direct* retativement au côté considéré de la surface. Si les axes sont donnés comme d'habitude, les rotations de Ox vers Oy, de Oy vers Oz et de Oz vers Ox, se font dans le sens de celle des aiguilles d'une montre pour un observateur debout sur le plan de la rotation du côté du troisième axe. Dans ce cas, le sens direct est celui qui laisse l'intérieur de l'aire à droite. C'est l'inverse de ce qui avait lieu dans le plan, et cela provient de ce que les axes Ox, Oy ne sont pas choisis d'habitude avec le même sens de rotation dans l'espace que dans le plan.

Exercices.

1. *Intégrale de Gauss.* Soient S une surface fermée, M un point fixe, r le rayon vecteur issu de M, (r, n) l'angle de r avec la normale extérieure à la surface. Selon que M est à l'intérieur de la surface, en dehors d'elle ou sur la surface, on a

$$\iint_S \frac{\cos(r, n) d\sigma}{r^2} = 4\pi, \quad 0 \quad \text{ou } 2\pi.$$

R, On remarque que l'élément de cette intégrale représente l'angle solide sous lequel l'élément $d\sigma$ est vu de M.

2. *Coordonnées elliptiques.* Considérons les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0.$$

Pour chaque système x, y, z, cette équation a trois racines λ_1, λ_2, λ_3 $[c < \lambda_1 < b < \lambda_2 < a < \lambda_3]$ que l'on appelle les *coordonnées elliptiques* du point x, y, z. Par chaque point passent donc trois surfaces, un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes et un hyperboloïde à une nappe. On a

$$x^2 = \frac{(\lambda_3 - a)(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{(a-b)(a-c)}, \qquad \frac{2dx}{x} = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - a} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - a} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - a},$$

et d'autres équations analogues en permutant circulairement xyz et abc. Montrer que le système est orthogonal et calculer l'élément de volume $\sqrt{H_1 H_2 H_3}\, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$.

R. On trouve, H_2 et H_3 s'obtenant par permutation circulaire,

$$4H_1 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)}.$$

§ 4. Formules usuelles de cubature et de quadrature. Applications.

35. Volumes en coordonnées rectangulaires et polaires. — Un solide étant limité en tous sens par des surfaces planes ou courbes, les points de ce solide forment un domaine D. En axes rectangulaires, le volume du solide est donné par l'intégrale triple (nº 13)

$$V = \iiint_D dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Les intégrations peuvent se faire de différentes manières :

1°) *Sommation par tranches parallèles.* Soient a et A les valeurs extrêmes de x dans D. Désignons par D_1 la section du solide par le plan x normal à Ox, ou encore le domaine du point yz dans cette section. On aura

$$V = \int_a^A dx \iint_{D_1} dy\, dz.$$

Mais l'intégrale de $dydz$ représente l'aire (fonction de x) de la section D_1, de sorte qu'il vient

$$V = \int_a^A \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Donc, quand on connaît $\varphi(x)$, la détermination de V est ramenée à une simple quadrature. Quand on emploie la formule (**2**), la sommation des éléments se fait par tranches parallèles. En effet, l'élément $\varphi(x)\,dx$ de l'intégrale est la valeur principale du volume de la tranche du solide comprise entre les plans x et $x + dx$. C'est la formule (**2**) qu'on a appliquée dans la première partie du cours. On pourrait en écrire deux autres analogues relatives à y et à z.

2° *Sommation par filets prismatiques.* Effectuons maintenant dans la formule (**1**) une première intégration par rapport à z. Supposons que la surface du solide ne soit coupée qu'en deux points par une parallèle à Oz. Soient z_1 et z_2 les ordonnées fonctions de x, y de ces deux points. Désignons enfin par D_2 l'aire de la portion du plan xy sur laquelle se projette le solide, aire limitée par le contour apparent de ce dernier. On aura

$$(3) \qquad V = \iint_{D_2} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \iint_{D_2} (z_2 - z_1)\,dx\,dy.$$

La détermination de V est ramenée à une intégrale double. On dit que la sommation des éléments se fait par filets prismatiques, parce que l'élément $(z_2 - z_1)\,dx\,dy$ de cette intégrale est la valeur principale du volume d'un filet compris entre deux plans x et $x + dx$ perpendiculaires à Ox, et deux autres y et $y + dy$ perpendiculaires à Oy.

La formule (**3**) se simplifie lorsque, le solide ayant une base plane B dans le plan xy lui-même, est limité latéralement par une surface cylindrique parallèle à Oz et supérieurement par une surface $z = f(x,y)$.

La base B constitue alors le domaine D_2 ; on a $z_1 = 0$ et $z_2 = z$; d'où

$$(4) \qquad V = \iint_{B} z\,dx\,dy.$$

4° *Sommation par filets prismatiques en coordonnées semi-polaires.* La sommation par filets prismatiques se fait souvent au moyen des coordonnées semi-polaires z, r et θ. Cela revient à se servir des coordonnées polaires r et θ dans le plan xy. Transformons ainsi l'intégrale (**4**) : il faut y remplacer $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$, ce qui donne

$$(5) \qquad V = \iint_{B} z\,r\,dr\,d\theta.$$

L'intégration s'étend au domaine du point (r, θ) dans la base B.

5° *Sommation par tranches sphériques.* Supposons que nous connaissions l'aire $\varphi(r)$ de la section faite dans le solide par la sphère de rayon r ayant son centre à l'origine. Le volume de la tranche sphérique comprise entre les sphères r et $r + dr$ aura pour valeur principale $\varphi(r)\,dr$. Il vient donc

$$V = \int \varphi(r)\,dr. \tag{6}$$

L'intégration s'étend aux valeurs de r pour lesquelles la sphère coupe le solide. Cette formule est peu employée, on se sert plutôt des suivantes que nous allons en déduire :

6° *Sommation par filets coniques (coordonnées polaires).* L'aire que nous venons de désigner par $\varphi(r)$ est généralement donnée par l'intégrale double (n° 26, form. 5)

$$\varphi(r) = \iint r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

En substituant cela dans la formule (6), il vient

$$V = \iiint r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi, \tag{7}$$

l'intégrale s'étendant au domaine de (r, θ, φ) dans le solide à évaluer.

C'est la formule générale pour l'évaluation des volumes en coordonnées polaires.

Supposons que le rayon vecteur ne coupe la surface du solide qu'en deux points. Soient r_1 et r_2 les valeurs, fonctions de (θ, φ), de r en ces deux points. Désignons par K le domaine de (θ, φ) dans le solide. On peut effectuer la première intégration par rapport à r, ce qui donne

$$V = \frac{1}{3}\iint_K (r_2^3 - r_1^3)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{8}$$

En particulier, si l'origine est dans l'intérieur du solide et que le rayon vecteur ne coupe sa surface qu'en un seul point, il faut faire $r_1 = 0$ dans la formule précédente. Il vient, r se rapportant à la surface,

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\,d\theta. \tag{9}$$

Dans ces deux dernières formules, l'élément de l'intégrale est le volume de l'élément conique du solide compris entre les deux cônes

θ et $\theta + d\theta$ (de révolution autour de Oz) et les deux plans φ et $\varphi + d\varphi$ (passant par Oz).

Nous allons donner quelques applications de ces formules.

36. Exemple de sommation par filets prismatiques. — Soit à calculer le volume compris entre le plan xy, le paraboloïde elliptique

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2$$

et le cylindre vertical qui a pour base l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La base du solide est plane, c'est la portion B du plan intérieure à cette ellipse. La formule (4) donne

$$V = \iint_B z\, dx\, dy = \alpha \iint_B x^2\, dx\, dy + \beta \iint_B y^2\, dx\, dy.$$

Les valeurs extrêmes de x dans B sont $-a$ et $+a$; les valeurs extrêmes de y pour un même x se tirent de l'équation de l'ellipse, elles sont

$$y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_1 = -y_2.$$

Il vient donc

$$\iint_B x^2 dx\, dy = \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-y_2}^{+y_2} dy = 4\int_0^a x^2 y_2 dx = \frac{4b}{a}\int_0^a x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Par le changement de variables $x = a \cos \varphi$, cette expression devient

$$4a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{a^3 b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi = a^3 b\, \frac{\pi}{4}$$

L'intégrale de $y^2 dx\, dy$ dans B sera $ab^3 \frac{\pi}{4}$, car elle se déduit de la précédente par une simple permutation de lettres. Il vient donc

$$V = \frac{\pi}{4} ab\, (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

37. Emploi des coordonnées semi-polaires. Problème de Viviani. — *On coupe un cylindre circulaire droit indéfini par une sphère dont le centre se trouve sur la surface du cylindre et dont le rayon a est égal au diametre de la section droite du cylindre. Calculer le volume commun à la sphère et au cylindre.*

Prenons l'origine au centre de la sphère, l'axe des z parallèle au cylindre. La section droite du cylindre par le plan xy est un cercle passant par l'origine. Menons l'axe des x par son centre ; l'équation de ce cercle sera, en coordonnées polaires,

$$r = a \cos \theta$$

et celle de la sphère, en coordonnées rectangulaires,

$$x^1 + y^2 + z^2 = a^2,$$

d'où, en coordonnées semi-polaires,

$$z = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Cherchons d'abord le volume V commun à la demi-sphère située dans la région des z positifs et au demi-cylindre situé dans celle des y positifs. Ce volume a pour base B dans le plan xy la demi-section droite dans laquelle θ varie de O à $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, pour un même θ, r varie dans cette base de O à $a \cos \theta$. Il vient donc, par la formule (5),

$$\begin{aligned} V &= \iint_B z\, r\, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r dr \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

Pour avoir le volume entier commun à la sphère et au cylindre, il faut quadrupler ce résultat, ce qui donne $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right) a^3$. Le premier terme est égal au volume de la demi-sphère. Donc *l'excès du volume de la demi-sphère située du côté des x positifs sur celui qu'en détache le cylindre est égal au neuvième du cube du diamètre.* C'est un exemple classique d'une cubature qui se fait exactement.

38. Quadrature des aires courbes en coordonnées rectangulaires et polaires. — Les intégrales les plus employées pour évaluer l'aire d'une surface courbe S sont celles du n° 21 :

$$\text{(10)} \qquad S = \iint_D \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

étendues à la projection D de S sur le plan xy, et celle qu'on en déduit par l'introduction des coordonnées polaires r et θ dans le plan xy :

$$\text{(11)} \qquad S = \iint_D \frac{r dr\, d\theta}{\cos Z}.$$

On se sert plus rarement des coordonnées polaires (r, θ, φ) dans l'espace qui conduisent à l'emploi des intégrales :

$$(12) \qquad S = \iint \frac{r^2 \sin\theta}{\cos(r, n)}\, d\theta\, d\varphi = \iint \frac{r^3 \sin\theta}{P}\, d\theta\, d\varphi,$$

étendues au domaine de (θ, φ) sur la surface (n° 26). On se rappelle que (r, n) désigne l'angle du rayon vecteur avec la normale et P la distance de l'origine au plan tangent.

39. Exemple : Aire du dôme de Viviani. — Les données étant les mêmes que dans l'exemple du n° 37, il s'agit de trouver l'aire de la portion de surface sphérique comprise dans le cylindre.

Conservons les mêmes axes que précédemment et considérons seulement la demi-sphère située dans la région des z positifs et le demi-cylindre situé dans celle des y positifs. Soit S l'aire de cette demi-sphère comprise dans ce demi-cylindre, sa projection sur le plan xy est l'aire B considérée dans le n° 37, de sorte que l'on a

$$S = \iint_B \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \iint_B \frac{r\, dr\, d\theta}{\cos Z}.$$

Ce cosinus s'obtient de suite, car on a $z = a \cos Z$, d'où

$$\cos Z = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Portons cette valeur dans l'intégrale double; les limites de r et de θ sont les mêmes que dans le n° 37, il vient donc

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\, d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2.$$

Pour avoir la portion de la surface sphérique comprise dans le cylindre, il faut quadrupler ce résultat, ce qui donne $(2\pi - 4)\, a^2$. Le premier terme est égal à l'aire de la demi-sphère. Donc l'*excès de la surface de la demi-sphère située du côté des x positifs sur celle que le cylindre en détache a pour valeur $4a^2$*. Donc cette aire est exactement quarrable. C'est le premier exemple qu'on ait trouvé d'une surface courbe exactement quarrable.

40. Quadrature des aires courbes en coordonnées curvilignes. — La formule générale que nous avons établie au n° (25)

$$(13) \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

est aussi d'un grand usage. Elle ramène, comme les précédentes, le calcul de l'aire S à une intégrale double. Mais il y a trois cas principaux dans lesquels cette quadrature se ramènera immédiatement à une intégrale simple :

1° *Surfaces engendrées par le mouvement hélicoïdal d'une courbe.* On appelle mouvement hélicoïdal celui qui se compose d'une rotation et d'une translation dont les axes coïncident. Prenons l'axe du mouvement pour axe des x et soient $X = \varphi(u)$, $Y = \psi(u)$ les équations de la section de la surface par le plan xy. Lorsqu'elle aura tourné de l'angle v, sa translation sera av (a constant) ; le point (X, O, Y) sera venu en (x, y, z) où l'on a :

$$x = X + av, \qquad y = Y \cos v, \qquad z = Y \sin v,$$

ce qui donne une représentation de la surface en coordonnées curvilignes u, v. En accentuant les dérivées par rapport à v, on a

$$ds^2 = (X'^2 + Y'^2)\, du^2 + 2a\, X'\, du\, dv + (Y^2 + a^2)\, dv^2,$$

par suite,

$$EG - F^2 = Y^2 (X'^2 + Y'^2) + a^2 Y'^2.$$

Cette expression ne dépendant que de u, l'intégration par rapport à v dans la formule (13) sera immédiate.

2° *Surfaces de révolution.* Si la translation est nulle dans le déplacement précédent, la surface est de révolution. Dans ce cas, $a = 0$, d'où

$$\sqrt{EG - F^2} = Y\sqrt{X'^2 + Y'^2}.$$

Par conséquent, l'aire engendrée par une révolution entière de la section génératrice sera, en appelant s l'arc de cette section,

$$S = \int Y \sqrt{X'^2 + Y'^2}\, du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int Y du \sqrt{X'^2 + Y'^2} = 2\pi \int Y ds.$$

C'est la formule obtenue dans la première partie du cours.

3° *Surfaces réglées.* Elles sont définies en coordonnées curvilignes u, v par trois équations :

$$x = a_1 + b_1 u, \qquad y = a_2 + b_2 u, \qquad z = a_3 + b_3 u$$

où les a, b dépendent de v seul. Désignons leurs dérivées par des accents, il vient

$$ds^2 = [(a_1' + b_1' u)^2 + \cdots]\, dv^2 + 2\, [a_1' b_1 + \cdots]\, du\, dv + [b_1^2 + \cdots]\, du^2$$

On aura donc, M, N, P dépendants de v seul,

$$EG - F^2 = M + 2\,Nu + Pu^2$$

L'élément d'aire ne contenant que la racine carrée de ce trinôme, nous saurons l'intégrer par rapport à u (1re partie, n° 178).

41. Aires limitées par des lignes d'égale déclivité. — Appelons lignes d'égale déclivité d'une surface, celles sur lesquelles Z est constant. Dans beaucoup de cas importants, *pour les surfaces du second degré* par exemple, on obtient immédiatement l'aire E de la projection sur le plan xy d'une portion S de surface limitée par des lignes d'égale déclivité. La détermination de l'aire S ne dépend plus alors que d'une intégrale simple.

En effet, appelons ΔE l'accroissement de E entre les projections de deux lignes successives (Z) et (Z + ΔZ) ; l'accroissement correspondant de S sera $\Delta E : \cos(Z + \theta\Delta Z)$ en vertu du théorème du n° 22. Donc, si l'on considère d'abord Z comme fonction de E, on aura, en faisant tendre les ΔE vers 0,

$$S = \Sigma\Delta S = \Sigma\frac{\Delta E}{\cos(Z + \theta\Delta Z)} = \int \frac{dE}{\cos Z}.$$

Si l'on veut calculer l'aire S comprise entre deux lignes (Z_1) et (Z_2), on aura, en prenant Z comme variable,

$$S = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dE}{dZ}\frac{dZ}{\cos Z}.$$

42. Aire de l'ellipsoïde. — Comme application de la méthode du n° précédent, cherchons l'aire de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c).$$

Il faut d'abord déterminer la projection de la ligne sur laquelle cos Z a une valeur constante u. Nous obtiendrons son équation en tirant de l'équation de l'ellipsoïde les valeurs de p et de q en fonction de x, y et en portant ces valeurs dans la relation

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{u^2}.$$

Cette équation se met facilement sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1 - \alpha^2 u^2}{1 - u^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1 - \beta^2 u^2}{1 - u^2}\right) = 1, \quad \text{en posant} \begin{cases} a^2 - c^2 = a^2\alpha^2, \\ b^2 - c^2 = b^2\beta^2. \end{cases}$$

Donc la projection cherchée est une ellipse dont on connaît les demi-axes et, par conséquent, l'aire E. On a

$$E = \pi ab\frac{1 - u^2}{\Delta\Delta'}, \quad \text{en posant} \begin{cases} \Delta^2 = 1 - \alpha^2 u^2, \\ \Delta'^2 = 1 - \beta^2 u^2. \end{cases}$$

Comme u (ou cos Z) varie de 1 à 0 pour la nappe supérieure de l'ellipsoïde, l'aire totale de la surface sera

$$S = -2\int_0^1 \frac{dE}{du}\frac{du}{u}.$$

Transformons d'abord l'intégrale indéfinie. On a

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi ab\frac{du}{u^2\Delta\Delta'} - \pi ab\frac{du}{\Delta\Delta'};$$

d'autre part, en différentiant,

$$d\,\frac{\Delta\Delta'}{u} = -\frac{\alpha^2\,\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{\beta^2\,\Delta}{\Delta'}\,du - \frac{\Delta\Delta'}{u^2}\,du = -\frac{\alpha^2\,\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{\Delta}{u^2\,\Delta'}\,du$$
$$= -\frac{\alpha^2\,\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{du}{u^2\,\Delta\Delta'} + \alpha^2\,\frac{du}{\Delta\Delta'},$$

d'où, en substituant,

$$\frac{\mathrm{E}\,du}{u^2} = \pi\,ab\left[-d\,\frac{\Delta\Delta'}{u} - \frac{\alpha^2\,\Delta'}{\Delta}\,du - (1-\alpha^2)\,\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

Par suite de cette relation, on a

$$\int\frac{d\mathrm{E}}{u} = \frac{\mathrm{E}}{u} + \int\frac{\mathrm{E}\,du}{u^2}$$
$$= \pi\,ab\left[\frac{1-u^2}{u\,\Delta\Delta'} - \frac{\Delta\Delta'}{u} - \alpha^2\int\frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-\alpha^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

D'après cela, l'aire totale S de l'ellipsoïde sera

$$\frac{\mathrm{S}}{2\,\pi\,ab} = -\left[\frac{1-u^2-\Delta^2\,\Delta'^2}{u\Delta\Delta'}\right]_0^1 + \alpha^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'},$$

ou, en remplaçant dans le terme aux limites Δ et Δ' puis α et β par leurs valeurs,

$$\frac{\mathrm{S}}{2\pi\,ab} = \frac{c^2}{ab} + \alpha^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}.$$

Ces intégrales se ramènent aux intégrales elliptiques de Legendre (*t.* I, n° 295) par la substitution $\alpha\,u = \sin\varphi$. L'expression de $\mathrm{S} : 2\pi ab$ devient ainsi

$$\frac{c^2}{ab} + \alpha\int_0^{\operatorname{arc\,sin}\alpha} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\int_0^{\operatorname{arc\,sin}\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

où l'on a posé $k = \beta : \alpha = \left(1-\frac{c^2}{b^2}\right) : \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$, quantité < 1 par hypothèse.

Exercices.

1. Aire de la portion de la surface conique $z^2 = 2\,xy$ comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

R. $$\mathrm{S} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{ab}{2}}\,(a+b)$$

2. Aire de la portion du paraboloïde $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ comprise dans la sphère $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$.

R. $$\mathrm{S} = 4\,\pi\,c\,\sqrt{ab}.$$

3. Aire du même paraboloïde mais intérieure au cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

R. $$\mathrm{S} = \frac{2\pi\,ab}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

4. Aire du même paraboloïde à l'intérieur d'une courbe d'égale déclivité Z.

R.
$$S = \frac{2\pi ab}{3}\left(\frac{1}{\cos^3 Z} - 1\right).$$

5. L'aire totale de la surface d'élasticité de Fresnel (podaire de l'ellipsoïde)
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$
est égale à celle d'un ellipsoïde qui a pour demi-axes $bc : a$, $ca : b$, $ab : c$.

R. On calculera l'aire de la surface proposée par la formule (12) et celle de l'ellipsoïde par la formule (13), en posant
$$x = \frac{bc}{a}\sin u \cos \sigma, \qquad y = \frac{ca}{b}\sin u \sin V, \qquad z = \frac{ab}{c}\cos u.$$

6. Volume commun au paraboloïde et au cylindre de l'exercice 3.

R. On décompose en filets prismatiques. Les intégrations sont faciles.

7. Volume compris entre la sphère de rayon a qui a son centre à l'origine, le plan XY et le cylindre $x^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

R. On décompose en filets prismatiques par les coordonnées semi-polaires. On trouve
$$V = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2\right).$$

§ 5. Intégrales multiples les plus générales. Ensembles.

Nous n'avons étudié dans les paragraphes précédents que des intégrales doubles ou triples. De plus, les fonctions considérées étaient soumises à des conditions de continuité dont on peut s'affranchir. La théorie tout à fait générale des intégrales multiples que nous allons exposer maintenant est une extension naturelle de celle que nous avons faite pour les intégrales simples dans le premier volume (Chap. VI, § 3).

43. Définition d'un domaine rectangulaire à n dimensions et de son étendue. — Soit $x, y, \ldots$ un système de n variables indépendantes qui peuvent prendre respectivement toutes les valeurs comprises dans les intervalles (a, A), $(b, B), \ldots$ Leur domaine de variation se représente géométriquement par un rectangle dans le cas de deux variables, par un prisme rectangulaire dans le cas de trois. Mais, au delà, la représentation géométrique fait défaut. Cependant nous dirons encore, par analogie, que les variables varient dans un *domaine prismatique rectangulaire* ou, en abrégé, dans un *domaine rectangulaire*.

Tout système de valeurs de $x, y, \ldots$ comprises dans les limites précédentes est un *point* du domaine ; chacune des quantités $x, y, \ldots$ est une *coordonnée* de ce point. Les différences $A - a$, $B - b, \ldots$ sont les

dimensions du domaine rectangulaire. *L'étendue* R du domaine est, par définition, égale au produit $(A - a)(B - b)\ldots$ de toutes ses dimensions.

La notion de l'étendue d'un domaine non rectangulaire est plus compliquée. Les définitions générales relatives à l'étendue se trouveront plus loin dans la théorie des ensembles (n° 53).

44. Théorème de M. Darboux. — Soient x, y,... des variables dans le domaine rectangulaire R étendu aux intervalles (a, A) de x, (b, B) de y,... Décomposons chacun de ces intervalles en éléments consécutifs par des points intermédiaires.

Soient δ_1, δ_2,... les éléments de l'intervalle (a, A), γ_1, γ_2,... ceux de (b, B), etc. Le domaine R sera décomposé, en même temps, en éléments ρ_1, ρ_2,..., chaque domaine ρ ne comprenant qu'un seul intervalle élémentaire pour chaque variable.

Soient $f(x, y,\ldots)$ une fonction bornée de $x, y,\ldots$, M et m ses limites supérieure et inférieure dans R, M_n et m_n ses limites analogues dans ρ_n. Formons les deux sommes étendues à tous les éléments ρ_n de R :

$$S = \Sigma M_n \rho_n, \qquad s = \Sigma m_n \rho_n.$$

Voici le théorème de M. Darboux :

Si l'on fait décroître indéfiniment tous les intervalles $\delta_i, \gamma_k,\ldots$, les deux sommes S et s tendront respectivement vers des limites bien déterminées L *et* l *indépendantes du choix des points de subdivision dans chaque intervalle* (a, A), (b, B), *etc.*

La démonstration s'appuie sur les deux propriétés suivantes des sommes S et s :

1° Toutes les sommes S et s sont comprises entre MR et mR. Cette propriété est évidente.

2° Si l'on considère un premier mode de subdivision des diverses dimensions de R en intervalles élémentaires δ_i, γ_k,..., puis un autre obtenu par l'adjonction de nouveaux points de subdivision aux premiers, la somme S sera stationnaire ou décroissante, la somme s stationnaire ou croissante. De plus, soit δ une limite supérieure de l'étendue des domaines partiels auxquels on réduit R quand on réduit une seulement de ses dimensions à un seul intervalle élémentaire du premier mode de subdivision; soit enfin ν le nombre total des nouveaux points de subdivisions ajoutés, la variation de chacune des sommes S et s sera moindre que $\nu(M - m)\delta$.

Il suffit de faire la démonstration pour S.

Supposons d'abord qu'on n'ajoute qu'un seul nouveau point de subdivision et, pour fixer les idées, que ce soit dans l'intervalle δ_l de x. Chacun des éléments ρ_n comprenant cet intervalle sera divisé en deux autres ρ'_n et ρ''_n et chacun des termes correspondants $M_n\rho_n$ sera remplacé par la somme de deux autres

$$M'_n \rho'_n + M''_n \rho''_n$$

où M'_n et M''_n sont les limites supérieures de f dans ρ'_n et ρ''_n. Cette somme est comprise entre $M_n \rho_n$ et $m_n \rho_n$ en vertu de la propriété 1° qui s'applique à ρ_n comme à R. Donc la somme S ne peut que décroître par l'adjonction du nouveau point de subdivision et sa diminution totale ne peut surpasser la somme $\Sigma' (M_n - m_n) \rho_n$ et *a fortiori* $\Sigma' (M - m) \rho_n$ étendues à tous les éléments ρ_n dont δ_i est une dimension. La somme de tous ces ρ_n forme un domaine d'étendue $< \delta$, donc la diminution de S est moindre que $(M - m) \delta$.

Si, au lieu d'un, on ajoute ν points de subdivision, on peut, en les ajoutant l'un après l'autre, appliquer ν fois le raisonnement précédent. La diminution de S sera donc moindre que $\nu (M - m) \delta$,

La démonstration du théorème de M. Darboux résulte facilement de ces deux propriétés.

Considérons d'abord les sommes S; elles sont bornées inférieurement (propriété 1°), elles ont donc une *limite inférieure* L. Je dis que S tend vers L quand tous les intervalles $\delta_i, \gamma_k, \ldots$ tendent vers 0.

En effet, soit ε un nombre positif d'une petite arbitraire; par définition de L, on peut trouver une somme $S' < L + \varepsilon$. Cette somme sera fournie par un mode déterminé Δ' de partage des dimensions de R, dont nous désignerons le nombre total des points de subdivision par ν.

Il s'agit maintenant de montrer qu'une somme quelconque S diffère aussi peu qu'on veut de L pourvu qu'elle soit calculée avec des subdivisions $\delta_i, \gamma_k, \ldots$ suffisamment petites. Quelque petit que soit le nombre positif δ, on peut supposer ces subdivisions assez petites pour que tous les domaines obtenus en réduisant l'une des dimensions de R à un seul intervalle δ_i ou $\gamma_k, \ldots$ aient leurs étendues $< \delta$. Supposons cette condition réalisée par le mode de partage Δ et considérons un troisième mode de subdivision Δ'' obtenu en ajoutant les points de subdivision du mode Δ' à ceux de Δ (donc au plus ν points). Soit S'' la somme correspondante; on aura (Propriété 2°)

$$S - S'' < \nu (M - m) \delta.$$

Mais Δ'' s'obtient aussi en ajoutant les points de Δ à ceux de Δ' de sorte qu'on a (Propriété 2°) $S'' < S'$ et *a fortiori* $< L + \varepsilon$. Il vient donc

$$S < L + \varepsilon + \nu (M - m) \delta.$$

Donc S qui ne peut être moindre que L en diffère aussi peu qu'on veut, car, après qu'on s'est donné ε aussi petit qu'on veut, $\nu (M - m) \delta$ est encore aussi petit qu'on veut avec δ.

On prouve de même que s tend vers sa *limite supérieure* l.

45. Intégrales par excès et par défaut. Fonctions intégrables; leurs propriétés. — La limite L s'appelle *l'intégrale par excès* de f dans le

domaine R, la limite l son *intégrale par défaut* (t. I, n° 222). Nous les représenterons par

$$(1)\quad \begin{cases} L = \int_R^E f(x, y, \ldots)\, dR \quad \text{ou} \quad \int_R^E f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \\ l = \int_R^D f(x, y, \ldots)\, dR \quad \text{ou} \quad \int_R^D f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \end{cases}$$

L'*ordre de multiplicité* de l'intégrale est égal au nombre des dimensions du domaine R, donc au nombre des variables $x, y, \ldots$ ou des différentielles $dx, dy \ldots$

Quand on le peut sans difficulté, on remplace dans la notation de l'intégrale, le signe $\int$ unique des formules (1) par des signes superposés en nombre égal à l'ordre de multiplicité de l'intégrale.

Les propriétés des intégrales par excès et par défaut étudiées au n° 225 du premier volume se généralisent facilement. Remarquons, en particulier, que si l'on décompose le rectangle R en plusieurs autres, chacune des deux intégrales dans R sera la somme des intégrales analogues dans les diverses parties de R.

Pour que la fonction f soit *intégrable* dans R, il faut que les limites l et L soient égales. Leur valeur commune I s'appelle l'*intégrale* de f dans R et l'on écrit simplement

$$(2)\qquad I = \int_R f(x, y, \ldots)\, dR = \int_R f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots$$

Dans ce cas, l'intégrale peut aussi se définir comme il suit :

I. *L'intégrale de f dans le domaine* R *est la limite de la somme* $\Sigma f(x_n, y_n, \ldots) \rho_n$ *étendue à tous les éléments rectangulaires* ρ_n *de* R *multipliés respectivement par la valeur de f en un point arbitraire* $(x_n, y_n, \ldots)$ *de chacun d'eux, quand tous ces éléments décroissent indéfiniment en tous sens.*

Si la fonction f n'est pas intégrable, cette limite n'existe plus, mais la somme considérée aura les deux expressions (1) comme limites d'indétermination. Aussi nous ne considérerons pas alors l'intégrale de f dans R ou l'expression (2) comme dépourvue de toute signification. Nous lui attribuerons une valeur indéterminée mais comprise entre les intégrales par excès et par défaut.

Les propriétés des fonctions intégrables énoncées au n° 326 du premier volume se généralisent aisément. Donc :

II. *Les sommes et les produits des fonctions intégrables dans un domaine* R *sont intégrables dans ce domaine. De plus, l'intégrale d'une somme sera égale à la somme des intégrales de chaque terme.* (Intégration par décomposition).

III, *Le quotient de deux fonctions intégrables est intégrable, pourvu que la fonction prise comme diviseur ait ses limites supérieure et inférieure de même signe.*

46. Expression de la différence entre les intégrales par excès et par défaut. — Désignons par disc $f(x_0, y_0, \ldots)$ la *discontinuité* de la fonction f au point $x_0, y_0, \ldots$ c'est-à-dire la limite de l'oscillation de f dans le domaine limité aux intervalles $x_0 \pm \varepsilon$, $y_0 \pm \eta, \ldots$ quand $\varepsilon, \eta, \ldots$ tendent vers 0. Le lemme du n° 227 du premier volume se généralise immédiatement comme il suit :

Quelque petit que soit le nombre positif donné ε, on peut décomposer le domaine rectangulaire R en éléments rectangulaires ρ_n aussi petits qu'on veut et tels qu'on ait dans chacun d'eux

$$M_n - m_n < \Delta_n + \varepsilon,$$

où $M_n - m_n$ est l'oscillation et Δ_n le maximum de la discontinuité de f dans le domaine ρ_n.

Par conséquent, la formule du même n° 227 qui exprime par une intégrale la différence entre les intégrales par excès et par défaut se généralise aussi. On a

$$(3) \qquad {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{\mathrm{R}} f\,d\mathrm{R} - {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_{\mathrm{R}} f\,d\mathrm{R} = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{\mathrm{R}} (\text{disc.}\,f)\,d\mathrm{R}.$$

47. Réduction des intégrales doubles à des intégrales simples. — *Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, intégrable dans un rectangle R borné par les valeurs a et A de x, b et B de y. L'intégrale double*

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\,dx\,dy$$

est réductible à deux intégrales simples effectuées consécutivement par rapport à chaque variable entre les limites du domaine.

Décomposons l'intervalle (a, A) en m parties consécutives $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ par les points $x_1 = a, x_2, \ldots x_{m+1} = \mathrm{A}$; l'intervalle (b, B) en n parties consécutives $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ par les points $y_1 = b, y_2, \ldots y_{n+1} = \mathrm{B}$. Le domaine R sera partagé en mn rectangles ayant respectivement pour étendues les produits $\delta_i \gamma_k$.

On a, par décomposition de deux intégrales simples consécutives :

$$ {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy \; {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \; {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx.$$

Désignons par M_{ik} et m_{ik} les limites supérieure et inférieure de f dans le rectangle $\delta_i \gamma_k$. Dans le terme général de la somme écrite au second membre de l'équation précédente, f reste compris entre M_{ik} et m_{ik}. On a donc

$$M_{ik}\delta_i\gamma_k \geqslant {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{y_k}^{y_{k+1}} dx \; {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx \geqslant m_{ik}\delta_i\gamma_k.$$

Il vient donc, en additionnant toutes les inégalités analogues,

$$\Sigma\,\Sigma\, M_{ik}\,\delta_i\,\gamma_k \geq {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy\; {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \geq \Sigma\,\Sigma\, m_{ik}\,\delta_i\,\gamma_k .$$

Faisons tendre tous les δ_i et tous les γ_k vers zéro ; les deux membres extrêmes tendent, par hypothèse, vers l'intégrale double supposée déterminée. Il vient donc

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\, dx\, dy = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy\; {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx.$$

On a aussi, par un raisonnement analogue,

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\, dx\, dy = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy\; {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx.$$

Mais, d'après la définition donnée dans le premier volume (n° 224) de l'intégrale d'une fonction présentant des points d'indétermination partielle, les seconds membres des deux équations précédentes reviennent aussi aux deux intégrales :

$${}^{\mathrm{E}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \qquad \text{et} \qquad {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx.$$

Celles-ci sont donc égales entre elles et reviennent, par conséquent, toutes deux à l'intégrale bien déterminée

$$\int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx.$$

Enfin, comme on peut permuter x et y dans les raisonnements précédents, on obtient le théorème suivant :

48. Théorème [1]. — *Si la fonction $f(x, y)$ est intégrable dans le rectangle* R, *les deux intégrales simples*

$$\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx, \qquad\qquad \int_b^{\mathrm{B}} f(x, y)\, dy,$$

sont respectivement des fonctions intégrables de y dans l'intervalle (b, B) *et de x dans l'intervalle* (a, A) ; *et l'on a*

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f(x,y)\, dx = \int_a^{\mathrm{A}} dx \int_b^{\mathrm{B}} f(x,y)\, dy.$$

49. Réduction des intégrales triples et multiples. — Un raisonnement semblable s'applique aux intégrales triples. Si la fonction $f(x, y, z)$ est

[1] Certains auteurs (Voir : Otto Stolz, Grundzüge der Differential-und-Integralrechnung. Dritter Theil, Leipzig 1899) semblent contester ce théorème. Mais le désaccord vient de ce que ces auteurs ne définissent pas l'intégrale d'une fonction à indétermination partielle, définition qui me paraît naturelle et nécessaire.

intégrable dans le domaine qui comprend les intervalles (a, A) de x, (b, B) de y, (c, C) de z. L'intégrale triple se ramène à trois intégrales simples consécutives effectuées par rapport à chaque variable entre ces limites, et cela dans un ordre arbitraire. En particulier, on peut intégrer successivement par rapport à x, y et z, ce qui donne

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^C dz \int_b^B dy \int_a^A f(x, y, z)\, dx.$$

Le résultat de la première intégration est une fonction de y, z. Cette fonction peut n'être pas intégrable par rapport à y, auquel cas le résultat de la seconde intégration sera une fonction de z présentant encore des points d'indétermination partielle. Mais cette nouvelle fonction sera certainement intégrable, de sorte que le résultat de la troisième intégration sera toujours complètement déterminé.

On voit immédiatement comment ce procédé de réduction s'étend à des intégrales multiples d'ordre quelconque.

50. Ensembles. Points-limites. Ensembles dérivés. — Soient x, y,.. des variables. Chaque système de valeurs particulières de ces variables s'appelle un *point* et une collection de points s'appelle un *ensemble*. Celui-ci a autant de *dimensions* qu'il entre de variables dans la définition de ses points. L'ensemble est *borné* si chacune des variables x, y,.. est elle-même bornée.

Soient $(a, b,..)$ et $(a', b',..)$ deux points p et p' ; on appelle *écart* de ces deux points la quantité

$$pp' = | a' - a | + | b' - b | + \cdots$$

Si l'ensemble est borné, l'écart pp' de deux points quelconques de l'ensemble est aussi une variable bornée. La limite supérieure de cette variable s'appelle le *diamètre* de l'ensemble.

Etant donnée une suite illimitée de points différents p_1, p_2,.. p_n,.. on dit qu'un point p est la limite de cette suite, si l'écart pp_n a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

On nomme *point-limite* d'un ensemble E tout point p (appartenant ou non à E) qui est la limite d'une suite de points de E. Donc, si p est un point-limite de E, on peut, quelque petit que soit le nombre positif δ, trouver un point de E dont l'écart à p soit $< \delta$. Réciproquement, tout point p jouissant de cette propriété est un point-limite.

Le système des points-limites de E est un nouvel ensemble E' que l'on appelle le *dérivé* de E.

51. Ensembles complémentaires. Points-frontières. — Soit E un ensemble. Si cet ensemble ne contient pas tous les points possibles, les points qui n'appartiennent pas à E forment un nouvel ensemble E_1. Les deux ensembles E et E_1 sont appelés *complémentaires*.

Soit p un point de E, on dit qu'il est *intérieur* à E et *extérieur* à E_1,

si l'on peut assigner un nombre positif δ tel que tout point p' dont l'écart à p est $< \delta$ soit aussi un point de E.

Tout point qui n'est ni un point intérieur ni un point extérieur de E et qui n'est, par conséquent, non plus ni un point extérieur ni un point intérieur de E_1, s'appelle un *point-frontière* de chacun des deux ensembles E et E_1. L'ensemble de ces points constitue *la frontière* des ensembles E et E_1.

Soit p un point-frontière. Si c'est un point de E, il y a dans E_1 des points infiniment voisins de p (sinon p serait intérieur à E), donc p appartient à E_1' ; de même, si p est un point de E_1, il appartient à E'. On voit ainsi que *les points-frontières sont ceux qui appartiennent à la fois à l'un des deux ensembles* E, E_1 *et au dérivé de l'autre.*

On peut encore caractériser autrement les points-frontières. Définissons une fonction $e(x, y, ..)$ égale à 1 en tout point de E et à 0 en tout point de E_1 ; les points frontières seront les points de discontinuité de cette fonction.

Considérons deux ensembles $\mathfrak{E}$ et E. Si tous les points de $\mathfrak{E}$ sont des points de E, nous dirons que l'ensemble $\mathfrak{E}$ est *compris* ou *contenu* dans E. Si tous les points de $\mathfrak{E}$ sont des points intérieurs de E nous dirons que l'ensemble $\mathfrak{E}$ est *intérieur* à E. Au contraire, $\mathfrak{E}$ sera *extérieur* à E si tous ses points sont extérieurs à E.

Tout ensemble E *compris dans un domaine rectangulaire* R *et qui ne contient pas tous les points de ce domaine admet au moins un point-frontière dans ce domaine.*

Le raisonnement étant général, on peut supposer les domaines à deux dimensions. Soient p et p' deux points de R dont p seulement soit un point de E. Faisons varier en ligne droite le point (x, y) de p à p' ; ce point restera dans R, mais la fonction $e(x, y)$ définie plus haut passera de 1 à 0. Comme elle ne passe pas par les valeurs intermédiaires, elle est discontinue en un point au moins de la droite pp' : ce sera un point-frontière.

52. Ensembles parfaits [1]. — *On appelle ensemble parfait un ensemble qui contient son dérivé* E'.

On peut aussi dire qu'*un ensemble parfait est un ensemble qui contient sa frontière.* En effet : 1° Un ensemble parfait E contient ses points-frontières, car, ceux-ci étant les points communs E et à E_1' ou à E_1 et E', appartiennent toujours à E ou E', donc toujours à E si E contient E'.

[1] C'est la définition de M. Jordan. D'autres auteurs appellent *fermés* les ensembles que nous appelons parfaits et *parfaits* ceux qui coïncident avec leur dérivé. Ces derniers sont aussi parfaits à notre sens, mais ils ne peuvent contenir de points isolés. Nous préférons éviter le mot fermé, qui a un tout autre sens dans la définition des *surfaces fermées* et sa généralisation *(variétés fermées).*

2° Réciproquement, un ensemble E qui contient ses points-frontières est parfait, car, dans ce cas, aucun point ne peut appartenir à la fois à E_1 et à E' (ce serait un point-frontière exclu de E), donc tous les points de E' sont dans E.

Tout ensemble E' *dérivé d'un autre* E *est parfait.* En effet, soient δ un nombre positif arbitraire et p'' un point limite de E'. Je dis que p'' est aussi un point-limite de E. En effet, on peut d'abord trouver dans E' un point p' tel que l'écart $p'p''$ soit $< \delta : 2$; ensuite, p' étant un point-limite de E, on peut trouver dans E un point p dont l'écart à p' soit $< \delta : 2$. Alors l'écart pp'' est $< \delta$. Donc p'' est un point-limite de E et appartient à E'. Donc E' contient tous ses points-limites et est parfait.

La frontière e d'un ensemble E *ou de son complémentaire* E_1 *constitue aussi un ensemble parfait.* En effet, soient p' un point-limite de e et δ un nombre positif aussi petit qu'on veut. On peut trouver dans e un point p dont l'écart à p' soit $< \delta : 2$. Supposons que p, qui est un point-frontière, appartienne à E et à E_1' ; alors on peut trouver dans E_1 un point p_1 dont l'écart à p soit $< \delta : 2$ et, par conséquent, celui à $p' < \delta$. Donc il existe des points p de E et p_1 de E_1 dont l'écart à p' est aussi petit qu'on veut. Donc p' n'est intérieur ni à E ni à E_1 ; c'est un point-frontière et il appartient à e.

53. Etendue d'un ensemble. Théorèmes divers. — Soit E un ensemble borné et intérieur à un domaine rectangulaire R d'ailleurs arbitraire. Désignons par $e(x, y, ..)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à zéro en tout autre point. Formons les deux intégrales

$$(4) \qquad \int_R^E e(x, y, ..)\, dx\, dy.., \qquad \int_R^D e(x, y, ..)\, dx\, dy...$$

La première est, par définition, l'*étendue extérieure*, la seconde l'*étendue* intérieure de E. Quand elles sont égales, l'ensemble E est mesurable et a pour *étendue*

$$E = \int_R e(x, y, ..)\, dx\, dy...$$

Appliquons à ces intégrales la relation (3) du n° 46 et remarquons encore que disc $f(x, y, ..) = 1$ en tout point frontière de E et $= 0$ en tout autre point. Nous obtenons les deux théorèmes suivants :

I. *La différence entre les étendues intérieure et extérieure d'un ensemble est égale à l'étendue extérieure de sa frontière.*

II. *Pour qu'un ensemble soit mesurable, il faut et il suffit que l'étendue de sa frontière soit nulle.*

Soient (a, A), (b, B),.. les intervalles qui définissent R. Décomposons-les respectivement en parties consécutives δ_i, γ_k,.. et, par suite, R en

éléments $\rho_n = \delta_i\gamma_k$... indéfiniment décroissants. Rappelons-nous alors la signification des intégrales (4), nous obtenons le théorème suivant :

III. *L'étendue intérieure de* E *est la limite de la somme des éléments* ρ_n *contenus dans* E, *l'étendue extérieure celle de la somme des éléments* ρ_n *contenant un point au moins de* E. Donc

IV. *La différence entre les étendues intérieure et extérieure de* E *est la limite de la somme des éléments* ρ_n *contenant à la fois des points de* E *et de son complémentaire* E_1 (donc aussi des points-frontières).

La comparaison des théorèmes I et IV montre que la somme des éléments ρ_n qui contiennent des points-frontières sans contenir à la fois des points de E et de E_1 a nécessairement pour limite zéro.

Décomposer un ensemble en plusieurs autres, c'est partager ses points en plusieurs catégories, chaque catégorie de points formant alors un ensemble partiel. On a le théorème suivant :

V. *Si l'on décompose un ensemble borné et mesurable* E *en plusieurs autres également mesurables* $E', E'', \ldots$, *l'étendue de* E *sera la somme de celles des parties.*

Soient e une fonction égale à 1 en tout point de E et à 0 partout ailleurs, $e', e'', \ldots$ les fonctions analogues relativement à $E', E'', \ldots$ On a $e = e' + e'' + \ldots$ Intégrons cette relation dans un domaine rectangulaire R contenant E ; l'intégrale du second membre peut se décomposer et il vient $E = E' + E'' + \ldots$

Il résulte évidemment de ce théorème que, si un ensemble mesurable E' est compris dans un autre E, l'étendue de E' ne surpasse pas celle de E.

54 Intégrales étendues à un ensemble mesurable. Leurs propriétés. Généralisation du théorème de M. Darboux. — Soit E un ensemble compris dans un domaine rectangulaire R et $f(x, y\ldots)$ une fonction bornée dans cet ensemble. Désignons par f_1 une fonction égale à f en tout point de E et à zéro en tout autre point, les intégrales par excès et par défaut de f dans E se désignent par

$$\int_E^{E} f\,dx\,dy\ldots, \qquad \int_E^{D} f\,dx\,dy\ldots$$

Elles sont égales, par définition, aux intégrales correspondantes de f_1 dans R :

$$\int_R^{E} f_1\,dx\,dy\ldots, \qquad \int_R^{D} f_1\,dx\,dy\ldots$$

Si ces intégrales sont égales, nous dirons que f est intégrable dans l'ensemble E.

Le cas où E n'est pas mesurable est dénué d'intérêt. Nous allons donc supposer, dans toutes les propriétés suivantes, que cet ensemble est mesurable :

I. *Si l'on désigne par* M *et* m *les limites supérieure et inférieure de* f *dans* E, *les intégrales par excès et par défaut de* f *dans* E *seront comprises entre* ME *et* mE.

Soit, en effet, $e(x, y, ...)$ la fonction égale à 1 dans E et a 0 en dehors; on a $\mathrm{M}e \geqslant f_1 \geqslant me$, d'où

$$\overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1\, dx\, dy \ldots \leqslant \mathrm{M} \overline{\int_{\mathrm{R}}} e\, dx\, dy \ldots = \mathrm{ME}$$

et l'on voit, de même, que l'intégrale par défaut est $\geqslant m$E.

Ce théorème porte le nom de *théorème de la moyenne*.

II. *Si l'on décompose l'ensemble* E *en plusieurs autres également mesurables* E′, E″,... *l'intégrale par excès (par défaut) de* f *dans* E *sera la somme des intégrales par excès (par défaut) de* f *dans* E′, E″,...

Définissons les fonctions f_1', f_1'',... par rapport à E′, E″,... comme f l'est par rapport à E. Décomposons R en éléments rectangulaires ρ_n indéfiniment décroissants. Soient M_n, M_n', M_n'', les limites supérieures de f_1, f_1', f_1'',... dans ρ_n. Si l'on étend les sommes Σ à tous les éléments ρ_n qui ne contiennent pas de points-frontières de E′, E″,..., on a

$$\Sigma\, \mathrm{M}_n \rho_n = \Sigma\, \mathrm{M}_n' \rho_n + \Sigma\, \mathrm{M}_n'' \rho_n + \ldots$$

La somme des éléments ρ_n contenant des points frontières tend vers 0 car les ensembles sont mesurables. On peut donc étendre les sommes précédentes à tous les ρ_n sans en changer les limites, de sorte qu'il vient ainsi

$$\overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1\, dx\, dy \ldots = \overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1'\, dx\, dy \ldots + \overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1''\, dx\, dy \ldots + \ldots$$

C'est le théorème énoncé (Démonstration analogue pour les intégrales par défaut).

III. *Décomposons l'ensemble* E *en un nombre indéfiniment croissant d'ensembles également mesurables* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots \mathrm{E}_n$, *dont les diamètres tendent vers* 0. *Soient, en général,* M_n *et* m_n *les limites de* f *dans* E_n. *Formons les deux sommes* $\Sigma \mathrm{M}_n \mathrm{E}_n$ *et* $\Sigma\, m_n \mathrm{E}_n$ *étendues à tous les éléments de* E. *Ces deux sommes ont pour limites respectives les intégrales par excès et par défaut de* f *dans* E.

Nous considérerons seulement la première somme, la démonstration étant analogue pour la seconde. On a d'abord, par les propriétés II et I,

$$(1) \qquad \overline{\int_{\mathrm{E}}} f\, dx\, dy \ldots = \sum_n \overline{\int_{\mathrm{E}_n}} f\, dx\, dy \ldots \leqslant \Sigma\, \mathrm{M}_n \mathrm{E}_n.$$

D'autre part, considérons une décomposition particulière de R en éléments rectangulaires ρ_n et soit μ_n la limite supérieure de f_1 dans ρ_n. Formons la somme d'abord fixe $\Sigma \mu_n \rho_n$ et comparons lui la somme variable $\Sigma\, \mathrm{M}_n \mathrm{E}_n$ dont les éléments tendent vers 0. Décomposons celle-ci en deux parties Σ' et Σ'' comme il suit :

La partie Σ' s'étendra à tous les éléments E_n qui sont respectivement intérieurs à un seul élément ρ_n. Celle-ci est évidemment $\leqslant \Sigma\mu_n\rho_n$.

La partie Σ'' s'étendra aux éléments E_n restants qui contiennent chacun des points de deux ρ_n au moins. Celle-ci tend vers 0, car tous ses éléments E_n finissent par tomber dans des domaines rectangulaires aussi minces qu'on veut bordant les ρ_n, et la somme de ces éléments tend donc vers 0.

Il vient donc, sans présupposer l'existence de la limite, l'inégalité ne signifiant d'abord qu'une limite d'indétermination,

$$\lim \Sigma\, M_n E_n \leqslant \Sigma\mu_n\rho_n.$$

Cette relation ayant lieu pour toute somme $\Sigma\mu_n\rho_n$, on a aussi, à la limite, les ρ_n tendant vers 0,

$$\lim \Sigma\, M_n E_n \leqslant \int_E^E f\,dx\,dy... \tag{2}$$

La comparaison des relations (1) et (2) prouve le théorème III, qui généralise celui de M. Darboux énoncé au n° 44.

55. Formes de la condition d'intégrabilité d'une fonction. — Il suffit de considérer la condition d'intégrabilité dans un domaine rectangulaire R, les autres cas se ramenant à celui-là.

La condition d'intégrabilité énoncée au n° 47 se ramène d'abord à la suivante par la formule du n° 48 :

Pour que f soit intégrable dans le domaine R, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_R^E (\operatorname{disc} f)\, dR = 0.$$

Cette condition peut se transformer dans la suivante par un raisonnement calqué sur celui fait au n° 234 du premier volume :

Soient ε *un nombre positif,* E_ε *l'ensemble des points de* R *où* disc $f \leqslant \varepsilon$, *la condition d'intégrabilité de f dans* R *est que l'étendue de* E_ε *soit nulle quelque petit que soit* ε.

Exercices.

1. L'étendue intérieure de la frontière d'un ensemble parfait E est nulle.

R. En effet, aucun domaine rectangulaire ne peut ne contenir que des points-frontières de E.

2. Un ensemble parfait d'étendue intérieure nulle se confond avec sa propre frontière.

3. Les étendues intérieure et extérieure d'un ensemble parfait ne changent pas, si l'on retranche à l'ensemble sa frontière.

R. Application de la remarque qui suit le théorème IV au n° 53.

4. La limite inférieure de l'écart d'un point de E_1 à un point de E_2 s'appelle *écart des ensembles* E_1, E_2. Montrer que l'écart de deux ensembles est le même que celui de leur frontière, et aussi de deux points de leur frontière.

5. Un ensemble borné et parfait est d'*un seul tenant* s'il ne peut être décomposé en deux ensembles séparés (d'écart > O). Montrer que, pour que les points communs à deux ensembles E_1 et E_2 d'un seul tenant forment un ensemble d'un seul tenant, il est nécessaire et suffisant que E_1 et E_2 aient un point commun.

6. Un ensemble de plusieurs points et d'un seul tenant se confond avec son dérivé.

CHAPITRE II.

Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégration des différentielles totales exactes.

---

§ 1. Intégrales définies généralisées simples et multiples.

56. Intégrales proprement dites, intégrales généralisées. — Dans le chapitre précédent, on n'a considéré que des fonctions et des domaines d'intégration limités. Si la fonction ou le domaine d'intégration devient infini, il faut un passage à la limite de plus pour définir l'intégrale. Nous donnerons aux intégrales qui comportent ce nouveau passage à la limite le nom d'*intégrales généralisées*, par opposition aux précédentes que nous appellerons des *intégrales proprement dites*. Les principes de ces nouvelles définitions ont déjà été brièvement indiqués dans le premier volume (nº 215).

Nous commencerons par exposer un théorème qui est souvent utile dans les recherches relatives à ces intégrales.

57. Deuxième théorème de la moyenne. — I. *Soient* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *deux fonctions finies et intégrables dans l'intervalle* (a, b). *Si, pour* $x > a$ *et* $< b$, $\varphi(x)$ *est:* 1° *toujours positive*, 2° *non décroissante*, 3° $\leqq$ B, *on aura*

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \mathrm{B}\int_\xi^b f(x)\, dx \qquad (a \leqq \xi \leqq b).$$

Décomposons l'intervalle (a, b) en éléments infiniment petits par les points $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots x_{n+1} = b$. Désignons, en général, par δ_i l'amplitude et par ξ_i un point intermédiaire de l'élément (x_i, x_{i+1}). Le premier membre de (1) est, par définition, la limite de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\, f(\xi_i)\, \delta_i.$$

On ne changera pas cette limite en remplaçant $f(\xi_i)\,\delta_i$ par $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$, car cela revient à négliger la somme

$$\Sigma\, \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\, dx,$$

dont la valeur absolue est $< \mathrm{B}\Sigma\Delta_i\delta_i$ (en appelant Δ_i l'oscillation de f

dans δ_i) et qui tend, par conséquent, vers O puisque f est intégrable. Donc le premier membre de (1) est aussi la limite de la somme

$$\sum_1^n \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_1^n \varphi(\xi_i) \left[\int_{x_i}^{b} - \int_{x_{i+1}}^{b} f\,dx\right]$$
$$= \varphi(\xi_1) \int_a^b f\,dx + \sum_2^n [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^b f\,dx.$$

On ne change pas non plus cette limite par l'addition d'un terme qui tend vers O, de sorte que le premier membre de (1) est encore la limite de l'expression

$$\varphi(\xi_1)\int_a^b f\,dx + \sum_2^n [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^b f\,dx + [B - \varphi(\xi_n)] \int_{x_n}^b f dx.$$

Les coefficients des trois intégrales de $f dx$ qui sont écrites dans cette expression sont respectivement positifs en vertu des trois hypothèses du théorème. Donc, en désignant par μ une moyenne entre ces intégrales ou, ce qui revient au même, entre les valeurs de $\int_x^b f\,dx$ dans l'intervalle (a, b) de x, l'expression précédente est de la forme

$$\mu\,[\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1) + \cdots + B - \varphi(\xi^n)] = \mu\,B.$$

Sa limite, ou le premier membre de (1), est donc aussi de la forme μ B. D'ailleurs la fonction continue $\int_x^b f\,dx$ atteint la valeur intermédiaire μ pour une valeur au moins ξ de x dans l'intervalle (a, b), ce qui établit l'équation (1).

II. *Plus généralement, quel que soit le signe de* $\varphi(x)$, *si, pour* $x > a$ *et* $< b$, *cette fonction est :* 1° $\geqslant$ A *et* $\leqslant$ B. 2° *toujours non croissante ou toujours non décroissante, on aura*

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = A \int_a^\xi f\,dx + B \int_\xi^b f\,dx, \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

En effet, si $\varphi(x)$ croît, on a. par le théorème I (φ — A étant positif),

$$\int_a^b (\varphi - A)\, f\,dx = (B - A) \int_\xi^b f\,dx,$$

ce qui revient à la formule (2). Si, au contraire, φ décroît, on changera dans la formule (2), le signe de φ, donc ceux de A et de B ce qui revient à changer les signes des deux membres et, comme $-\varphi$ croît, on sera ramené au cas précédent.

Le théorème II donne lieu à deux formules particulières, souvent employées :

III. *On aura, en particulier, sous les mêmes conditions que* II,

$$(3) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f\,dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f\,dx.$$

En effet, on peut faire, dans la formule (2), $A = \varphi(a + 0)$ et $B = \varphi(b - 0)$ en désignant par là les limites de φ quand x tend vers a en décroissant ou vers b en croissant, limites toujours existantes car, dans les deux cas, la variation de φ ne change pas de sens.

IV. *Si la variation de* $\varphi(x)$ *ne change pas de sens dans l'intervalle* (a, b), *on aura*

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a) \int_a^\xi f dx + \varphi(b) \int_\xi^b f dx$$

En effet $\varphi(x)$ reste alors compris entre $\varphi(a) = A$ et $\varphi(b) = B$.

58. Définition des intégrales à limites infinies. — Soit $f(x)$ une fonction finie et intégrable dans l'intervalle (a, x') quelque grand que soit x' ; on pose, par définition,

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\, dx.$$

Si cette limite est déterminée, l'intégrale sera *déterminée* ou *convergente* ; si cette limite n'existe pas, l'intégrale *n'existe pas* non plus, mais elle n'est pas nécessairement dépourvue de toute signification, car son indétermination peut n'être qu'incomplète. Ainsi, si le second membre de l'équattion précédente finit par rester compris entre deux nombres fixes A et B, les limites supérieure de A et inférieure de B seront les *limites d'indétermination* de l'intégrale. Si ce second membre finit par surpasser tout nombre positif, l'intégrale est *infinie positive*. De même, elle peut être *infinie négative*.

Si l'on sait effectuer l'intégration indéfinie de $f(x)$, la connaissance d'une fonction primitive $F(x)$ permettra de reconnaître immédiatement si l'intégrale existe et d'en calculer la valeur. Il faudra, pour que l'intégrale existe, que $F(x)$ ait une limite $F(\infty)$ pour $x = \infty$ et l'intégrale aura pour valeur $F(\infty) - F(a)$.

Mais, en général, on ne connaît pas de fonction primitive et il faut un examen plus minutieux.

D'après les principes de la théorie des limites, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale à limite infinie converge, est que la différence des deux intégrales prises dans les intervalles (a, x') et (a, x'') soit infiniment petite, x' et x'' étant des infiniment grands indépendants. Cette différence se réduit à l'intégrale, prise entre deux limites qui augmentent indéfiniment,

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\, dx,$$

que l'on appelle une *intégrale singulière*. Donc, *pour que l'intégrale à limite infinie existe, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale singulière correspondante ait pour limite* 0.

La condition se simplifie quand $f(x)$ ne change pas de signe, car, dans ce cas, l'intégrale entre a et x' varie toujours dans le même sens quand x' augmente. L'intégrale entre a et l'infini sera donc nécessairement déterminée ou infinie.

Une intégrale est *absolument convergente* quand elle converge après qu'on y a remplacé $f(x)$ par sa valeur absolue ; et alors elle est convergente, car la valeur absolue de l'intégrale singulière ne diminue certainement pas quand on rend tous ses éléments positifs et, si elle tend vers 0 après ce changement, elle tendait déjà vers 0 avant.

Si une intégrale convergente cesse au contraire de converger par ce changement, nous dirons qu'elle est *semi-convergente*.

On considère aussi des intégrales dont la limite inférieure est infinie. En supposant $f(x)$ toujours finie et intégrable dans l'intervalle (x', b), elles se définissent par la formule analogue à la précédente

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^{b} f(x)\,dx.$$

Elles donnent lieu aux mêmes considérations que les intégrales précédentes, auxquelles on les ramène d'ailleurs en changeant x en $-x$.

Enfin, si les deux limites sont infinies, on pose (le choix de a étant indifférent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

ce qui ramène aux deux cas précédents.

59. Règles de convergence absolue (Limites infinies). — Nous nous bornerons à la seule intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$, car les règles relatives aux autres s'obtiennent par analogie. Nous remarquerons d'abord que cette intégrale sera convergente ou non, absolument convergente ou non, en même temps que $\int_p^\infty f(x)dx$ où p est un nombre aussi grand qu'on veut, car elle n'en diffère que par une intégrale proprement dite. C'est pourquoi, la limite inférieure de l'intégrale étant arbitraire dans les règles suivantes (sous la seule condition que $f(x)$ reste finie et intégrable), nous nous dispenserons de l'écrire.

I. *Supposons qu'on ait* $| f(x) | < | \varphi(x) |$ *à partir d'une certaine valeur de* x, *et formons les deux intégrales :*

$$\int^{\infty} f dx, \qquad \int^{\infty} \varphi dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi ; si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

En effet, si l'intégrale de $| \varphi | dx$ est finie, celle de $| f | dx$ le sera *a fortiori* (donc elle convergera) ; si l'intégrale de $| f | dx$ est infinie, celle de $| \varphi | dx$ le sera *a fortiori* (donc celle de φdx ne sera pas absolument convergente).

On applique souvent ce théorème dans le cas où f est infiniment petit par rapport à φ pour $x = \infty$; il prouve alors que, si la seconde intégrale est absolument convergente, la première l'est aussi.

II. *Si* φ *ne change pas de signe et que le quotient* $f : \varphi$ *tende vers une limite* L *finie et différente de* 0 *pour* $x = \infty$, *les deux intégrales de la règle précédente seront absolument convergentes ou divergentes en même temps.*

En effet, si x croît suffisamment, $f(x)$ finit par rester compris entre deux nombres de même signe ~~[L — ε et L + ε]~~ Remarquons alors que les deux intégrales $(L - \varepsilon) \varphi(x)$ et $(L + \varepsilon) \varphi(x)$

$$\int^{\infty} (L - \varepsilon) \varphi \, dx = (L - \varepsilon) \int^{\infty} \varphi \, dx, \qquad \int^{\infty} (L + \varepsilon) \varphi \, dx = (L + \varepsilon) \int^{\infty} \varphi \, dx,$$

convergent ou divergent en même temps que celle de φ, et cela *absolument* car leur élément ne change pas de signe ; nous en concluons, par le théorème I, que l'intégrale de $f dx$ ayant son élément intermédiaire entre ceux des précédentes, converge ou diverge aussi en même temps.

III. *Si, pour* x *infini,* $f(x)$ *est infiniment petit d'ordre déterminé* α, *la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\int^{\infty} f dx$ *est que l'on ait* $\alpha > 1$ *et alors la convergence est absolue.*

On dit que f est infiniment petit d'ordre α si le rapport $f(x) : x^{-\alpha}$ tend vers une limite L, finie et différente de 0, pour $x = \infty$. Cette règle est donc un cas particulier de la précédente : l'intégrale de $f dx$ converge ou diverge en même temps que celle de $x^{-\alpha} dx$, laquelle

converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1\,; \\ \operatorname{Log} x, \text{ si } \alpha = 1, \end{cases}$$

qui tend vers l'infini avec x, sauf si α est > 1.

Voici quelques exemples d'application de ces règles :

Les intégrales suivantes convergent, par la règle III où $\alpha = 2$:

$$\int^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int^\infty \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2}, \qquad \int^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Les intégrales suivantes (dont l'élément est moindre en valeur absolue que celui de la dernière écrite ci-dessus) sont absolument convergentes par la règle I :

$$\int^\infty \frac{\sin x\,dx}{a^2+x^2}, \qquad \int^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\,(a^2+x^2)}.$$

Soient a et n des quantités positives ; les intégrales suivantes (dont l'élément est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+\varepsilon}$) convergent par le même règle,

$$\int^\infty e^{-ax}\,dx, \qquad \int^\infty x^n\,e^{-ax}\,dx, \qquad \int^\infty x^n\,e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

60. Règles applicables à la semi-convergence. — V. *Si une intégrale* $F(x)$ *de* $\varphi(x)$ *reste finie pour* $x = \infty$, *l'intégrale*

$$\int^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx$$

converge pour toute valeur positive de α.

On a, en effet, par intégration par parties, puis passage à la limite,

$$\int_a^{x'} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{F(x)}{x^\alpha}\right]_a^{x'} + \alpha\int_a^{x'} \frac{F(x)\,dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx = -\frac{F(a)}{a^\alpha} + \alpha\int_a^\infty \frac{F(x)\,dx}{x^{1+\alpha}}$$

Or cette dernière intégrale converge par la règle II, car $F(x)\,dx : x^{1+\alpha}$ est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon < \alpha)$, ce qui est l'élément d'une intégrale convergente.

Par exemple, les *sinus* et *cosinus* ayant leurs intégrales finies et périodiques, cette règle prouve l'existence des intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

qui sont semi-convergentes.

VI. *Soit $\varphi(x)$ une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui tend vers une limite finie pour $x = \infty$, formons les deux intégrales :*

$$\int^{\infty} f(x)\, dx, \qquad \int^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

si la première converge, la deuxième converge aussi.

En effet, par le deuxième théorème de la moyenne, on a $(x' < \xi < x'')$

$$\int_{x'}^{x''} \varphi f\, dx = \varphi(x') \int_{x'}^{\xi} f\, dx + \varphi(x'') \int_{\xi}^{x''} f\, dx.$$

Si x', x'' et, par suite, ξ tendent vers l'infini, les deux intégrales singulières du second membre tendent vers 0 par hypothèse. Comme elles sont multipliées par des quantités finies par hypothèse, le second membre tend vers 0, et avec lui, l'intégrale singulière du premier membre, ce qui prouve le théorème.

VII. *Soient $\varphi(x)$ une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui a pour limite 0 pour $x = \infty$, ensuite* $F(x)$ *une fonction primitive de $f(x)$; si* $F(x)$ *est bornée pour $x = \infty$, $\int^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$ sera convergente.*

En effet, la formule de la démonstration précédente subsiste ; son second membre peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x') \Big[F(x) \Big]_{x'}^{\xi} + \varphi(x'') \Big[F(x) \Big]_{\xi}^{x''}$$

et tend vers 0 avec $\varphi(x')$ et $\varphi(x'')$, car $F(x')$, $F(\xi)$ et $F(x'')$ restent finis.

Par exemple, les intégrales de $\sin x$ et $\cos x$ étant des fonctions bornées périodiques, ce théorème prouve l'existence des intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{a^2 + x^2}\, dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{a^2 + x^2}\, dx.$$

61. Définitions des intégrales de fonctions infinies. — Soit maintenant à intégrer une fonction $f(x)$ illimitée dans l'intervalle (a, b).

1° Si $f(x)$ est finie et intégrable dans l'intervalle $(a, b - \varepsilon)$ quelque petit que soit ε, mais illimitée dans l'intervalle $(b - \varepsilon, b)$, on pose, par définition, ε restant positif,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale soit

déterminée ou *convergente*, est que la différence des intégrales étendues aux intervalles $(a, b-\varepsilon)$ et $(a, b-\varepsilon')$, ou que l'*intégrale singulière* à laquelle elle se réduit

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx,$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits (positifs) indépendants. Si l'intégrale existe, elle peut être *absolument* ou *semi-convergente* et, si elle n'existe pas, son indétermination peut n'être que partielle comme pour les intégrales à limites infinies. Pratiquement, on ne rencontre guère que des intégrales absolument convergentes.

2° Si f est finie et intégrable dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b)$ mais illimitée dans $(a, a+\varepsilon)$, l'intégrale dans (a, b) se définit par la formule analogue

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

Elle existera si l'*intégrale singulière* $\int_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f dx$ tend vers 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépendants.

3° Si f est finie et intégrable dans l'intervalle (a, b), sauf aux environs des extrémités a et b, on partagera l'intervalle en deux autres par un point intermédiaire c (dont le choix est indifférent) et l'intégrale dans (a, b) sera la somme de celles dans (a, c) et (c, b).

4° Plus généralement, $f(x)$ peut être finie et intégrable dans toute portion de l'intervalle (a, b) ne contenant pas un nombre limité de *points singuliers* aux environs desquels elle devient infinie. Supposons, pour fixer les idées, que a et b soient de ce nombre et désignons les autres points singuliers par x_1, x_2,.. L'intégrale étendue à (a, b) sera, par définition, la somme de celles étendues à (a, x_1), (x_1, x_2),.., ce qui ramène au cas précédent. La condition d'existence de l'intégrale étendue à (a, b) est donc que chacune des intégrales singulières

$$\int_{a-\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon'} f dx, \qquad \int_{x_1+\varepsilon'}^{x_1+\varepsilon} f dx, \ldots$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépendants.

62. Remarques. — I. Les définitions précédentes sont évidemment telles que, si l'on partage l'intervalle (a, b) en plusieurs parties, l'intégrale dans (a, b) sera la somme des intégrales dans chaque partie.

II. Les conditions d'existence que nous venons d'écrire expriment que *l'intégrale* $\int_a^x f dx$ *est encore une fonction continue de x dans l'intervalle* (a, b). En effet, en faisant tendre ε' vers 0 avant ε, on en conclut que les intégrales :

$$\int_a^{a-\varepsilon} f dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} f dx, \qquad \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f dx, \ldots\ldots$$

sont infiniment petites avec ε. Donc l'intégrale entre a et x est continue aux points singuliers a, $x_1, \ldots$ les seuls pour lesquels sa continuité soit en question.

III. On peut énoncer, pour les intégrales généralisées, un *théorème analogue à celui de la moyenne*. Ainsi, si f a une limite inférieure m ou bien une limite supérieure M dans l'intervalle (a, b), on aura

$$\int_a^b f dx \geqq m\,(b-a) \qquad \text{ou bien} \qquad \int_a^b f dx \leqq \mathrm{M}\,(b-a).$$

En effet, en admettant pour fixer les idées que b soit le seul point singulier, ces relations ont lieu quand on y remplace b par $b-\varepsilon$ elles subsistent donc, à la limite, pour $\varepsilon = 0$.

IV. *Quand la fonction f est constamment positive dans l'intervalle* (a,b) *où elle devient infinie*, la définition de l'intégrale de $f dx$ dans l'intervalle (a, b) peut se faire comme il suit :

Décomposons l'intervalle (a, b) *en parties consécutives infiniment petites δ_i et soit m_i la limite inférieure de f dans δ_i ; on aura*

$$\int_a^b f dx = \lim \Sigma\, m_i \delta_i,$$

la sommation s'étendant à tous les δ_i.

En effet, en considérant l'intégrale du premier membre comme la somme des intégrales étendues aux intervalles δ_i et en appliquant à chacune d'elles le théorème précédent (III), on a

$$(1) \qquad \int_a^b f dx \geqq \Sigma\, m_i \delta_i.$$

D'autre part, supposons encore, pour fixer les idées, que b soit le seul point singulier ; quelque petit que soit ε, $\Sigma\, m_i \delta_i$ finira par surpasser l'intégrale proprement dite étendue à l'intervalle $(a, b-\varepsilon)$. On a donc

$$\int_a^{b-\varepsilon} f dx < \lim \Sigma\, m_i \delta_i.$$

Si l'intégrale aux limites a et b est infinie, le premier membre de

cette inégalité tend vers l'infini quand ε tend vers 0, donc la limite de la somme est infinie aussi.

Si au contraire, l'intégrale aux limites a et b est déterminée, il vient, en faisant tendre ε vers 0,

$$(2) \qquad \int_a^b f dx \leqslant \lim \Sigma\, m_i \delta_i.$$

En la comparant à (1), on voit que cette relation n'est possible que comme équation, ce qui achève de prouver le théorème.

63. **Règles de convergence (fonctions infinies)**. — I. *Supposons qu'on ait, sauf pour les valeurs singulières de* x, $|\, f(x) \,| \leqslant |\, \varphi(x) \,|$ *et formons les intégrales :*

$$\int_a^b f\, dx, \qquad \int_a^b \varphi\, dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi. Si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

Ce théorème se démontre comme le théorême analogue relatif aux intégrales à limites infinies (n° 59, I).

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $f(x)$ ne soit infinie que quand x tend vers b. La règle suivante, énoncée dans cette hypothèse spéciale, s'adaptera d'elle-même aux autres cas :

II. *Si* φ *ne change pas de signe quand* x *tend vers* b (*unique point singulier*) *et que le quotient* $f : \varphi$ *tende vers une limite* L, *finie et différente de* 0, *quand* x *tend vers* b, *les deux intégrales de la règle précédente seront en même temps absolument convergentes ou divergentes.*

La démonstration faite (n° 59, II) pour les intégrales à limites infinies se généralise d'elle-même.

III. *Si, en chaque point singulier,* $f(x)$ *est infinie d'ordre déterminé* α, *la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\int_a^b f(x) dx$ *est que tous ces ordres* α *soient* < 1 *et alors la convergence sera absolue.*

Ce théorème se ramène au précédent par la définition de l'*ordre d'infinitude*, qui est la suivante : On dit que $f(x)$ est infinie d'ordre α pour $x = c$, si l'on a

$$f(x) = \frac{\psi_1(x)}{(c - x)^\alpha} \text{ (pour } x < c\text{)}, \qquad f(x) = \frac{\psi_2(x)}{(x - c)^\alpha} \text{ (pour } x > c\text{)},$$

les fonctions ψ_1 et ψ_2 ayant des limites finies et différentes de 0 pour

$\lim x = c$. Toutefois, si c est une des extrémités de l'intervalle (a, b), on ne tient compte que du seul cas où x varie dans cet intervalle.

Ceci posé, nous pouvons admettre dans la démonstration que b soit le seul point singulier. Il suffit alors d'appliquer l'énoncé du théorème précédent en y faisant $\varphi = (b - x)^{-\alpha}$, car l'intégrale de $(b - x)^{-\alpha}\, dx$ converge dans l'intervalle (a, b) si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} (b-x)^{1-\alpha} : (1-\alpha), \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1\,; \\ \operatorname{Log}(b-x), \text{ si } \alpha = 1, \end{cases}$$

qui est infinie quand x tend vers b, sauf si $\alpha < 1$.

Par exemple, si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et 1, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

est absolument convergente, car, en chacun des deux points singuliers 0 et 1, $f(x)$ est infinie d'ordre < 1.

64. Intégration des fonctions illimitées dans des intervalles infinis. Intégrales doublement généralisées. — Une même intégrale peut comporter en même temps les deux sortes de généralisations précédentes. C'est ce qui arrive si l'on intègre dans l'intervalle (a, ∞) une fonction présentant des points singuliers où elle devient infinie. Si ces points sont en nombre limité, la définition se ramène aux précédentes. En effet, il suffira de désigner par b un nombre arbitraire supérieur à toutes les valeurs singulières et de poser, par définition,

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx.$$

Par exemple, si l'on a $0 < a < 1$, l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

est *absolument convergente* comme somme de deux intégrales absolument convergentes.

Mais, s'il y a une infinité de valeurs singulières, il faut de nouvelles définitions. Nous nous bornerons aux seuls cas suivants :

1° On intègre dans un intervalle illimité une fonction dont tous les points singuliers sont isolés. Dans ce cas, supposant que l'intégrale existe dans toute portion limitée de l'intervalle, on la définira dans l'intervalle entier par les mêmes passages à la limite qu'au n° 58.

2° On intègre dans l'intervalle (a, b) une fonction dont tous les points singuliers sont isolés, sauf un nombre limité d'entre eux, par exemple $a, x_1, x_2, \ldots b$. Dans ce cas, supposant l'existence de l'intégrale dans toute portion de l'intervalle (a, b) d'où ces derniers points sont exclus, la définition s'étendra à l'intervalle entier par les mêmes passages à la limite qu'au n° 61.

Il est clair que les propriétés de l'intégrale généralisée énoncées au n° 62 subsistent pour nos nouvelles intégrales, car il suffit, pour les établir, de recommencer les raisonnements faits dans ce numéro.

3° Supposons maintenant qu'on doive intégrer dans un intervalle illimité une fonction dont l'intégrale est déterminée par la définition précédente dans tout intervalle limité ; la définition dans l'intervalle entier s'obtiendra, comme dans le cas (1°), par les passages à la limite du n° 58.

Les définitions peuvent se généraliser davantage encore, mais celles qui précèdent suffisent toujours en pratique. Nous voulons nous arrêter à celles-là, de telle sorte que les intégrales qui ne rentreraient pas dans ces définitions seront considérées, dans la suite, comme *dépourvues de signification déterminée.*

65. Valeurs principales. — Cauchy a fait grand usage de ce qu'il appelle la *valeur principale* d'une intégrale indéterminée. Soit d'abord $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs de x. Il est possible que la définition habituelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x',x''=\infty} \int_{-x''}^{x'} f(x)\,dx$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe si l'on fait $x'' = x'$. Dans ce cas, cette limite sera, par définition, la *valeur principale* de l'intégrale du premier membre.

De même, soit $f(x)$ une fonction continue en tout point de l'intervalle (a, b), sauf au seul point x_1 où elle est infinie ; il se peut que la définition habituelle

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon,\varepsilon'=0} \int_a^{x_1-\varepsilon} + \int_{x_1+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe en faisant $\varepsilon' = \varepsilon$. Cette limite est alors, par définition, la *valeur principale* du premier membre. On aperçoit immédiatement ce que deviendra cette définition s'il y a plusieurs points singuliers entre a et b.

Par exemple, l'intégrale de $dx : x$ est indéterminée si on l'étend de -1 à $+1$, mais sa valeur principale est nulle.

66. Calcul des intégrales généralisées. Intégration par décomposition et par parties. — 1° La formule fondamentale pour le calcul des intégrales définies,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

subsiste, si l'intégrale est généralisée, pourvu que la fonction $\mathrm{F}(x)$ soit continue en tout point de l'intervalle (a, b) sans exception et qu'elle ait $f(x)$ pour dérivée sauf aux points singuliers de $f(x)$. Nous avons déjà établi ce théorème dans le premier volume (n° 216) et montré qu'il subsiste pour $b = \infty$ quand $\mathrm{F}(x)$ a une limite $\mathrm{F}(\infty)$ pour $x = \infty$. La démonstration du premier volume s'étend d'elle-même aux définitions plus générales du n° 64 en recommençant un raisonnement identique sur les points singuliers non isolés.

2° La formule d'intégration par décomposition se généralise aussi. Soit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; on aura (a et b pouvant être infinis)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

pourvu que deux au moins de ces trois intégrales soient déterminées, la troisième l'étant alors nécessairement, car la limite d'une somme est toujours égale à la somme des limites supposées existantes.

Supposons qu'on sache seulement qu'une des deux intégrales du second membre est déterminée. Si l'on s'interdit de faire passer les termes d'un membre dans l'autre, on pourra encore écrire la formule précédente, mais elle signifiera seulement que les deux membres sont ou égaux ou tous deux indéterminés mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Pour justifier cette remarque, considérons un cas particulier, le raisonnement étant général. Supposons a et b finis et admettons que f, f_1 et f_2 n'aient qu'un point singulier b. Si c'est l'intégrale de f_1 qui est déterminée, on aura, η tendant vers 0 avec ε,

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \eta.$$

Donc, ε étant infiniment petit, toute restriction à l'indétermination d'un des deux membres de cette relation entraîne la même restriction pour l'autre membre.

Cette remarque a son importance pour reconnaître si une intégrale donnée est déterminée ou non, car, si l'on peut simplifier celle-ci

par l'addition d'une intégrale déterminée, il suffira de raisonner sur l'intégrale simplifiée.

3° Quand la règle d'intégration par parties est encore applicable, elle résulte des précédentes. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues entre a et b mais dont les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ aient des points de discontinuité isolés. On a, par la première règle qui précède,

$$\int_a^b [f(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,f'(x)]\,dx = [f(x)\,\varphi(x)]_a^b$$

Donc, si l'une des deux intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx, \qquad \int_a^b \varphi(x)\,f'(x)\,dx$$

est déterminée, il en sera de même de l'autre et l'on aura

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = [f(x)\,\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)\,f'(x)\,dx.$$

Si a ou b est infini, le terme aux limites peut être indéterminé et il faut une condition de plus pour que la formule précédente soit légitime. Il faut, en effet, admettre que deux au moins des trois termes qu'elle renferme aient une valeur déterminée et alors ils seront déterminés tous les trois.

67. Changement de variables. — Nous allons montrer que la formule de transformation des intégrales définies établie dans le premier volume peut être généralisée. Voici cette formule, dans laquelle nous supposerons, pour fixer les idées, que T est $> t_1$:

$$(1) \qquad \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

On peut énoncer la règle suivante :

Si la dérivée $\varphi'(t)$ est continue et différente de 0 dans l'intervalle (t_1, T) sauf peut être aux extrémités, la formule (1) subsiste pour les intégrales généralisées en ce sens que les deux membres seront ou bien égaux ou bien tous deux indéterminés, mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Cette règle n'exclut pas le cas où $\varphi(t)$ serait discontinue aux extrémités t_1 et T, ni celui ou t_1 et T seraient eux-mêmes infinis, mais il faut alors, comme la démonstration va le montrer, que $\varphi(t_1)$ et $\varphi(T)$ désignent les limites de $\varphi(t)$ quand t tend vers t_1 en décroissant ou vers T en croissant, limites qui seront finies ou infinies (de signe

déterminé), puisque, φ' ne s'annulant pas, la variation de φ ne change pas de sens.

Cette remarque faite, nous pouvons démontrer la règle.

Supposons d'abord que t_1 et T soient finis et admettons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait de point singulier de $f(x)$ ou de $f(\varphi)$ qu'aux deux limites des intégrales. Quand t varie de t_1 à T, la fonction $\varphi(t)$ varie dans un seul sens et ne passe qu'une fois par les valeurs $\varphi(t_1+\varepsilon)$ et $\varphi(\mathrm{T}-\eta)$, en sorte que l'on a, sans difficulté, les deux membres étant des intégrales proprement dites,

$$(2)\qquad \int_{\varphi(t_1+\varepsilon)}^{\varphi(\mathrm{T}-\eta)} f(x)\,dx = \int_{t_1+\varepsilon}^{\mathrm{T}-\eta} f(\varphi)\,\varphi'\,dt.$$

Si l'on fait tendre ε et η vers 0, on obtient la relation (1) avec le sens que nous lui avons donné.

Par exemple, par la substitution $x = \sin^2 t$, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}\,(\cos t)^{2q-1}\,dt$$

et, par la substitution $x = -\log t$,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}\,e^{-x}\,dx = -\int_1^0 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt.$$

Si t_1 et T étaient infinis, il faudrait simplement, pour faire la démonstration, remplacer, dans la formule (2), $t_1+\varepsilon$ par un infiniment grand négatif t' et $\mathrm{T}-\eta$ par un infiniment grand positif T′, la formule (2) subsistant avec ces nouvelles limites en vertu de la démonstration même que nous venons de faire.

Par exemple, on aura, par la substitution $x = \sqrt{t}$,

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Remarque. — Lorsque les conditions de la règle précédente ne sont pas vérifiées, il faudra le plus souvent, pour procéder avec sécurité, partager l'intervalle (t_1, T) en intervalles partiels satisfaisant aux conditions de la règle et étudier la transformation dans chaque intervalle séparément. Toutefois, dans certains cas, on pourra encore utiliser la règle suivante :

Si $\varphi(t)$ est continue entre t_1 et T et que $\varphi'(t)$ ne soit nulle ou discontinue qu'en des points isolés de l'intervalle (t_1, T), la formule (1) subsistera pourvu que son second membre soit déterminé.

En effet, on peut écrire la formule analogue à (1) pour chacun des intervalles de t compris entre deux points singuliers consécutifs de $\varphi'(t)$. Pour chacun d'eux, les deux membres de la formule obtenue seront déterminés et égaux. En ajoutant ces diverses formules, on retrouvera la formule (1), dont les deux membres seront donc aussi déterminés et égaux.

68. Intégrales doubles généralisées. Définitions et conditions d'existence. — Considérons d'abord une aire D limitée par un contour fermé C qui satisfait aux conditions du n° 1. Soit $f(x, y)$ une fonction infinie dans cette aire. Nous supposerons, comme dans le chapitre I, que les points de discontinuité de la fonction sont isolés ou répartis sur certaines lignes de discontinuité satisfaisant aux conditions connues (n° 4). Les points de discontinuité seront, en particulier, ceux où $f(x, y)$ devient infinie, mais il peut y en avoir d'autres..

Pour définir l'intégrale

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

on procède à peu près comme pour les intégrales simples. On commence par enlever les points singuliers du champ d'intégration. A cet effet, on entoure les points singuliers isolés d'un contour infiniment petit, les lignes de discontinuité d'un contour infiniment voisin et l'on considère la portion D′ de l'aire D qui est extérieure aux contours auxiliaires. L'intégrale étendue à D′ étant une intégrale proprement dite, on pose, par définition,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim \iint_{D'} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Pour que l'intégrale existe dans D, il faut que cette limite soit déterminée et unique, le tracé des contours auxiliaires restant arbitraire.

Plus généralement, les conditions relatives au mode de répartition des points de discontinuité peuvent se vérifier dans le domaine D sauf sur le bord, c'est-à-dire qu'elles ont lieu dans toute portion du domaine D qni n'en touche pas le bord. Alors l'intégrale double dans D se définit sans plus de difficulté que dans le cas précédent, car on peut encore faire tendre vers D un domaine D′ dans lequel la fonction est continue, et l'intégrale dans D sera la limite de celle dans D′.

Enfin, si le champ d'intégration D s'étend à l'infini dans certaines

directions ou dans tous les sens, on définit encore l'intégrale par le même procédé. On commence par limiter une portion D' de l'aire D par un contour auxiliaire variable C'. On éloigne à l'infini le contour C' de manière que D' embrasse successivement tous les points de D ; l'intégrale dans D sera la limite de celle dans D' et sera déterminée pourvu que cette limite existe.

Voici maintenant les théorèmes fondamentaux relatifs aux conditions d'existence de cette limite :

I. *Lorsque la fonction f ne change pas de signe dans l'aire* D (*bornée ou non*), *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale double soit déterminée dans* D *est que l'intégrale dans* D' *soit bornée quand* D' *tend vers* D.

En effet, si l'aire D' tend vers D en se développant constamment et si l'on suppose f positif, l'intégrale dans D', étant bornée et croissante, aura une limite déterminée.

Cette limite est unique, car, si l'on considère une autre aire D'' tendant aussi vers D, on peut la concevoir comme intermédiaire entre deux états successifs D'_1 et D'_2 de D' tels que D'' contienne D'_1 et soit contenu dans D'_2. Comme on peut faire tendre simultanément D'_1, D'' et D'_2 vers D, l'intégrale dans D'', qui est intermédiaire entre celles étendues à D'_1 et D'_2, aura aussi la même limite.

II. *Lorsque la fonction f change de signe dans D, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale double est qu'elle soit absolument convergente.*

En effet, soient φ une fonction égale à f pour $f \geqslant 0$ et égale à 0 pour $f < 0$; ψ une autre fonction égale à f pour $f \leqslant 0$ et à 0 pour $f > 0$. Formons les intégrales de φ et de ψ dans D. Si toutes deux sont déterminées, l'intégrale de f dans D sera égale à leur somme ; si l'une des deux est déterminée et l'autre infinie, celle de f sera infinie comme cette dernière ; enfin, si toutes deux sont infinies, on pourra, en faisant varier les contours auxiliaires, donner la prédominance à celle que l'on voudra des deux intégrales de φ et de ψ dans l'aire D' de manière que l'intégrale de f tende vers une limite arbitraire quand D' tend vers D. Pour que l'intégrale de f existe dans D, il faut et il suffit donc que celles de φ et de ψ soient déterminées. Il faut donc que celle de $\varphi - \psi = |f|$ soit déterminée ~~aussi~~. Cette dernière condition est
aussi

d'ailleurs suffisante, car alors l'intégrale de $|f|$ est au moins égale à celles de φ et de $-\psi$, qui sont par conséquent bornées, donc, les fonctions φ et ψ ne changeant pas de signe, leurs intégrales seront déterminées, en vertu du théorème précédent.

69. Application. Valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. — Considérons l'intégrale double, étendue à la portion D du plan comprise entre les demi-axes de coordonnées positives,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dD.$$

Soit d'abord D' la portion de D limitée par un arc de cercle de rayon r autour de l'origine. On aura, en faisant la réduction en coordonnées polaires r et θ,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,d\,D' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2})$$

Si l'on fait tendre r vers ∞, D' embrasse successivement tous les points de D ; l'intégrale précédente restant finie et la fonction à intégrer positive, l'intégrale dans D sera la limite de la précédente. Il vient donc

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, limitons dans l'aire D un carré D'' par les droites $x = r$ et $y = r$. On aura

$$\iint_{D''} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^r e^{-x^2}\,dx \int_0^r e^{-y^2}\,dy = \left[\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right]^2.$$

Mais D' est intérieur à D'' et D'' l'est à D ; donc les intégrales dans D', D'' et D se suivent par ordre de grandeur, leurs racines carrées aussi, ce qui donne

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-r^2}} < \int_0^r e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Si r tend vers l'infini, le premier membre de ces inégalités tend très rapidement vers le troisième ; il vient donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et l'on voit que l'intégrale $\int_0^r e^{-x^2}\,dx$ converge rapidement vers cette limite quand r augmente. Cette intégrale joue un rôle important en calcul des probabilités.

70. Transformation des intégrales doubles. — Soient Ω un domaine, limité ou non, dans le plan uv, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ deux fontions continues, dont le jacobien J soit également continu et différent de 0 dans l'intérieur de Ω. On ne stipule rien sur la frontière. Supposons que les formules :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

fassent correspondre uniformément les *points intérieurs* à Ω aux *points intérieurs* à une aire D, limitée ou non, dans le plan xy. On aura

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_\Omega |\, J \,|\, f(\varphi, \psi)\, du\, dv.$$

En effet, représentons par Ω′ un domaine limité, intérieur à Ω, dans lequel f est continue, et qui tend vers Ω ; le domaine correspondant D′ sera aussi limité et tendra vers D. L'équation précédente a lieu sans difficulté quand on y accentue D et Ω (n° 18) ; elle subsiste donc à la limite, et c'est précisément ce qu'on écrit en supprimant les accents.

Le sens de l'équation précédente est le même que pour la formule de transformation des intégrales simples. Les deux membres seront soit égaux, soit tous deux indéterminés mais alors avec les mêmes limites d'indétermination.

§ 2. Réduction des intégrales doubles généralisées [1].

71. Hypothèses et notations. — Nous supposerons, dans tout ce paragraphe comme dans le précédent, que la fonction à intégrer $f(x, y)$ n'est discontinue ou infinie que sur des lignes de discontinuité soumises aux conditions ordinaires, sauf peut être sur la frontière du domaine d'intégration (n° 68). Le cas le plus important est celui où $f(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine d'intégration et où ce domaine est un rectangle R, compris entre les abscisses a et A, les ordonnées b et B. Nous nous placerons d'abord dans ce cas, mais, pour fixer les idées, nous admettrons dans les démonstrations que la fonction f est positive (ou nulle).

Nous venons de voir que l'intégrale dans R est la limite de celle dans un domaine D′ qui tend vers R mais dans lequel $f(x, y)$ est con-

[1] Pour une étude plus approfondie de la réduction des intégrales multiples généralisées, on peut consulter mon article du *journal de mathématiques pures et appliquées* 1899.

tinue. Soient $D'_1, D'_2, .. D'_n, ..$ une suite illimitée d'états successifs du domaine variable D', telle que D'_n *se développe constamment* et tende vers R quand n tend vers l'infini. Appelons $f_n(x, y)$ une fonction égale à f dans D_n et à 0 en dehors et posons

$$F(x) = \int_b^B f(x, y)\, dy, \qquad F_n(x) = \int_b^B f_n(x, y)\, dy.$$

En vertu des définitions et des propriétés des intégrales généralisées, F sera la limite de F_n quand n tend vers l'infini. Nous ne savons d'ailleurs pas si F existe ou non pour chaque valeur de x, mais, si F n'est pas déterminé, F sera infini positif (f étant positif).

Ceci posé, les théorèmes relatifs à la réduction de l'intégrale double reposent sur le lemme suivant, où se trouve le point délicat de la démonstration :

72. Lemme. — *Si* $F(x)$ *a une limite inférieure finie* m *dans l'intervalle* (a, A) *et qu'on désigne par* μ_n *celle de* $F_n(x)$, m *sera la limite de* μ_n *pour* $n = \infty$.

Remarquons d'abord que, quand n augmente, F_n tend vers F *sans décroître* (f étant positif), donc μ_n ne peut décroître non plus et μ_n, étant toujours $\leqslant m$, tend vers une limite μ qui sera aussi $\leqslant m$. Il s'agit de prouver que $\mu = m$.

Je dis d'abord qu'il existe au moins un point ξ dans l'intervalle (a, A) où l'on a $F(\xi) \leqslant \mu$.

En effet, si la relation $F_n(a) \leqslant \mu$ a lieu quel que soit n, elle subsiste à la limite et l'on a $F(a) \leqslant \mu$, ce qui prouve la proposition.

Supposons donc qu'il y ait un indice n pour lequel $F_n(a)$ soit $> \mu$, cette relation subsistera *a fortiori* pour tous les indices suivants. Considérons ceux-là seulement. La fonction continue F_n, qui, dans l'intervalle (a, A), passe par les valeurs $F_n(a)$ et μ_n, passera aussi par la valeur intermédiaire μ. Soit ξ_n la plus petite solution de l'équation $F_n(x) = \mu$ dans cet intervalle. Cette plus petite solution existe, car, F_n étant continue, la limite inférieure des solutions est une solution. Ceci admis, si n tend vers l'infini, ξ_n sera stationnaire ou croissant (car, si F_n est $> \mu$ entre a et ξ_n, F_{n+1} l'est *a fortiori*), donc ξ_n, qui est toujours compris dans l'intervalle (a, A), tendra vers un point ξ de cet intervalle. Considérons maintenant les relations.

$$F_n(\xi_{n+p}) \leqq F_{n+p}(\xi_{n+p}) = \mu$$

qui ont lieu pour tous les nombres positifs n et p. Faisons tendre p d'abord vers l'infini ; il viendra (F_n étant continue)

$$\lim_{p=\infty} F_n(\xi_{n+p}) = F_n(\xi) \leqq \mu\,;$$

d'où, n tendant ensuite vers l'infini,

$$\lim_{n=\infty} F_n(\xi) = F(\xi) \leqq \mu.$$

Le lemme résulte immédiatement de là, car $F(\xi)$ ne peut être moindre que m (minimum de F) et m est au moins égal à μ. On a donc $F(\xi) = \mu = m$.

On remarquera que nous avons prouvé, en même temps, que la fonction $F(x)$ atteint toujours son minimum dans l'intervalle (a, A).

73. Théorème I. — *Si la fonction $f(x, y)$ ne change pas de signe dans le rectangle* R *compris entre les abscisses a, A et les ordonnées b, B, son intégrale dans ce rectangle se réduit à des intégrales simples par la formule habituelle*

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy,$$

sous la seule condition que cette réduction conduise à un résultat déterminé (l'infini non excepté).

Quand nous disons que le résultat est déterminé, nous entendons donc par là que la fonction

$$F(x) = \int_b^B f(x, y)\,dy$$

(qui, d'après nos hypothèses, est déterminée ou infinie) satisfait aux conditions qui ont été admises dans le paragraphe précédent pour définir les intégrales généralisées (n° 68). Dans ce cas, l'intégrale de $F(x)$ est aussi déterminée ou infinie ; mais, si sa valeur est infinie, la démonstration prouvera que l'intégrale double est infinie aussi. Ceci bien entendu, supposons, pour fixer les idées, que f soit positif et passons à la démonstration du théorème.

On a, la réduction ne donnant pas lieu à discussion pour f_n,

$$\iint_R f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \iint_R f_n\,dx\,dy = \lim \int_a^A dx \int_b^B f_n\,dy,$$

ou, plus simplement,

$$\iint_R f\,dx\,dy = \lim \int_a^A F_n(x)\,dx.$$

Divisons (a, A) en intervalles élémentaires δ_i et désignons par μ_{ni} le minimum de $\mathrm{F}_n(x)$ dans δ_i ; on aura, en appliquant le théorème de la moyenne à chaque intervalle δ_i,

$$\int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{F}_n(x)\,dx \geqslant \Sigma \mu_{ni}\,\delta_i.$$

Faisons d'abord tendre n vers l'infini ; μ_{ni} tend vers le minimum m_i de $\mathrm{F}(x)$ dans δ_i, en vertu du lemme précédent qui s'applique à δ_i comme à (a, A). Il vient ainsi, à la limite,

$$\iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy \geqslant \Sigma\, m_i \delta_i.$$

Faisons maintenant tendre tous les δ_i vers 0 ; il vient, par la remarque IV du n° 62,

$$\iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy \geqslant \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{F}(x)\,dx.$$

Mais, d'autre part, f est $\geqslant f_n$ et $\mathrm{F} \geqslant \mathrm{F}_n$; donc l'intégrale de F (qui est déterminée ou infinie) l'emportera toujours sur celle de F_n quelque grand que soit n, on a donc

$$\iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy = \lim \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{F}_n(x)dx \leqslant \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{F}(x)\,dx.$$

Comparons ce résultat au précédent ; on en conclut

$$\iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy = \int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{F}(x)\,dx,$$

ce qui revient à la formule du théorème.

74. Théorème II. — *Si la fonction $f(x, y)$ ne change pas de signe et que le domaine d'intégration s'étende au plan des xy tout entier, l'intégrale de f dans ce domaine que nous désignerons par* P, *se réduira aux intégrales simples par la formule*

$$(2) \qquad \iint_{\mathrm{P}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy,$$

pourvu que cette réduction fournisse un résultat déterminé.

Transformons les deux intégrales simples consécutives du second membre par les substitutions

$$y = \frac{v}{1-v^2}, \quad x = \frac{u}{1-u^2}; \quad dy = \frac{(1+v^2)\,dv}{(1-v^2)^2}, \quad dx = \frac{(1+u^2)\,du}{(1-u^2)^2},$$

qui sont permises car nous ferons varier u et v de -1 à $+1$ et, dans

cet intervalle, les dérivées de x et y sont, sauf aux limites, continues et positives (nº 67). Le domaine du point (u, v) sera un carré R, borné dans les deux sens par les valeurs -1 et $+1$; et, si l'on pose, en abrégé,

$$\varphi(u, v) = f\left(\frac{u}{1-u^2}, \frac{v}{1-v^2}\right) \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1-u^2)^2(1-v^2)^2},$$

le second membre de l'équation (2) se transformera dans le premier membre de la relation suivante :

$$\int_{-1}^{+1} du \int_{-1}^{+1} \varphi(u, v)\, dv = \int\int_{R} \varphi(u, v)\, du\, dv.$$

Quant à l'exactitude de celle-ci, elle se justifie par le théorème précédent (I), car son premier membre est déterminé. Tout revient donc à montrer que l'intégrale double étendue à R est la même que celle étendue à P, ce qui résulte enfin de la formule de transformation des intégrales doubles établie au nº 70. Il est à peine besoin de faire observer que les conditions supposées dans cette formule sont ici pleinement remplies.

75. **Théorème III.** — *Si la fonction $f(x, y)$ ne change pas de signe, on aura, les limites des intégrales étant finies ou infinies mais constantes,*

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx,$$

sous la seule condition que les deux membres soient déterminés.

En effet, on peut permuter x et y dans les deux théorèmes précédents et, par conséquent, les deux membres de cette équation représentent la même intégrale double.

76. **Théorème IV.** — *Si $f(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine* D *de forme quelconque, l'intégrale de f dans* D *se réduira à des intégrales simples entre les limites du domaine* D *par le procédé ordinaire, sous la seule condition que cette réduction conduise à un résultat déterminé.*

En effet, en désignant par f_1 une fonction égale à f dans D et à 0 en dehors, ensuite par P le domaine étendu au plan xy tout entier, on a, quel que soit le domaine D fini ou infini,

$$\int\int_D f\, dx\, dy = \int\int_P f_1\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1\, dy,$$

pourvu que la dernière expression soit déterminée.

En négligeant les intervalles d'intégration dans lesquels f_1 est constamment nulle, on voit que cette expression est la même que celle obtenue en faisant directement la réduction de la première intégrale double, ce qui établit le théorème.

77. Si la fonction $f(x, y)$ change de signe dans le domaine d'intégration D, le procédé le plus simple pour effectuer, en toute sécurité, sa réduction à des intégrales simples sera généralement de partager le domaine D en plusieurs autres où la fonction ne change pas de signe et de faire la réduction dans chacun de ces domaines séparément.

Toutefois, si ces domaines partiels sont de forme compliquée ou ne satisfont pas aux conditions convenues (nº 1), ou bien encore s'il y en a un nombre infini, on pourra utiliser le théorème suivant :

Théorème V. *Si $f(x, y)$ change de signe dans le domaine d'intégration* D, *l'intégrale double de f peut encore se réduire à des intégrales simples, si la réduction est permise quand on remplace f par sa valeur absolue.*

Dans la démonstration, nous admettrons (les autres cas s'y ramenant) qu'on choisit comme domaine d'intégration le rectangle R compris entre les abscisses a et A, les ordonnées b et B.

Soit alors φ une fonction (positive ou nulle) égale à f pour f positif et à 0 pour f nul ou négatif. Cette fonction φ n'aura pas d'autres lignes de discontinuité que celle de f; elle satisfera, sous le rapport de ces lignes, aux mêmes conditions que f. Je vais maintenant montrer que l'on aura

$$(1) \qquad \int\int_R \varphi\, dx\, dy = \int_a^A dx \int_b^B \varphi\, dy,$$

en prouvant, à cet effet, que le second membre est déterminé.

Définissons φ_n par rapport à φ comme f_n l'a été par rapport à f (nº 71). L'intégrale de φ_n étant certainement déterminée dans R quelque grand que soit n, il suffit de montrer que la différence

$$\int_a^A dx \int_b^B \varphi\, dy - \int_a^A dx \int_b^B \varphi_n\, dy = \int_a^A dx \int_b^B (\varphi - \varphi_n)\, dy,$$

qui est déterminée en même temps que son premier terme ou qui a sinon la même amplitude d'indétermination, peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Pour cela, j'observe que l'on a $|f| - |f_n| \geqq \varphi - \varphi_n$; donc, l'intégrale de $|f|$ étant déterminé par hypothèse, on a

$$\int\int_R |f|\, dx\, dy - \int\int_R |f_n|\, dx\, dy = \int_a^A dx \int_b^B (|f| - |f_n|)\, dy$$
$$\geqq \int_a^A dx \int_b^B (\varphi - \varphi_n)\, dy.$$

Quand n tend vers l'infini, le premier membre a pour limite 0, car son premier terme est, par définition, la limite du second. Donc la dernière expression tend aussi vers 0, elle est donc aussi petite que l'on veut. Donc le second membre de (1) est déterminé et cette équation est démontrée.

Soit, de même, ψ une fonction (nulle ou positive) égale à $-f$ pour f négatif et à 0 pour f nul ou positif ; on aura, pour les mêmes raisons,

$$(2) \qquad \iint_R \psi \, dx \, dy = \int_a^A dx \int_b^B \psi \, dy.$$

Soustrayons (2) de (1) et observons que $\varphi - \psi = f$, le théorème sera démontré.

§ 3. Intégration et dérivation des intégrales définies par rapport à un paramètre. Convergence uniforme des intégrales généralisées.

78. **Intégration par rapport à un paramètre.** — Soit $f(x, \alpha)$ une fonction continue des deux variables x et α dans un domaine rectangulaire R, limité par les valeurs a et b de x et par les valeurs α_0 et α_1 de α ; l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

est comme nous l'avons démontré au n° 3 (où y remplace α) une fonction continue de α dans l'intervalle (α_0, α_1). On peut se proposer d'intégrer ou de dériver cette fonction.

Si l'on intègre $\varphi(\alpha)$, on tombe sur une intégrale double

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha) \, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) \, dx.$$

On peut utiliser pour la calculer toutes les méthodes de transformation étudiées dans le premier chapitre, mais la plus employée est la *règle d'intégration sous le signe* qui consiste à intervertir les intégrations par rapport à x et α. Toutefois il ne faut pas oublier que cette règle n'est établie que pour les intégrales proprement dites. Nous verrons tout à l'heure qu'elle ne s'étend aux intégrales généralisées que sous des conditions particulières.

79. Dérivation par rapport à un paramètre. Règle de Leibnitz. — Considérons, comme au n° précédent, l'intégrale proprement dite

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

et supposons que la fonction $f(x, \alpha)$ ait une dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ déterminée et continue dans le rectangle limité par les valeurs a et b de x, α_0 et α_1 de α. La dérivée de $\varphi(\alpha)$ dans l'intervalle (α_0, α_1) s'obtiendra en dérivant simplement par rapport à α la fonction sous le signe d'intégration, de sorte que l'on aura

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Cette règle est celle de la *dérivation sous le signe* ou *règle de Leibnitz.* C'est une conséquence de la précédente.

Soit, en effet, α un point quelconque de l'intervalle (α_0, α_1) ; on a, par la règle d'intégration sous le signe,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \int_a^b [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0).$$

La dérivée du premier membre par rapport à α est la fonction sous le signe d'intégration extérieur. Il vient donc, en égalant les dérivées des deux membres extrêmes,

$$\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \varphi'(\alpha).$$

80. Modification de la règle de Leibnitz dans le cas des limites variables. — La règle précédente suppose que les limites a et b sont indépendantes de α. Considérons maintenant une intégrale dont les limites x_1 et x_2 soient des fonctions de α, par exemple

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha)\, dx. \qquad (x_2 > x_1)$$

Nous supposerons : 1° que x_1 et x_2 sont deux fonctions continues de α ayant des dérivées également continues dans l'intervalle (α_0, α_1) ; 2° que la dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ est déterminée et continue dans le domaine D du plan $x\alpha$ compris entre les droites $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ et les courbes $x = x_1$, $x = x_2$.

Je dis que l'on aura, sous ces conditions, dans l'intervalle (α_0, α_1),

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(x_2, \alpha)\frac{dx_2}{d\alpha} - f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha},$$

c'est-à-dire que l'on doit ajouter deux termes complémentaires à celui fourni par la règle de Leibnitz.

Cette nouvelle règle se ramène à celle de Leibnitz par un changement de variables. Substituons, en effet, à x une nouvelle variable d'intégration t par la relation

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t,$$

de sorte que x est maintenant fonction de t et de α et coïncide avec x_1 pour $t = 0$ et avec x_2 pour $t = 1$. L'intégrale transformée sera

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) \frac{\partial x}{\partial t}\, dt$$

où la fonction à intégrer a pour expression développée

$$f[x_1 + (x_2 - x_1)\, t, \alpha]\,(x_2 - x_1).$$

Cette expression est une fonction continue de t et de α dans le rectangle du plan $t\alpha$ compris entre les valeurs 0 et 1 de t, α_0 et α_1 de α. On voit de suite que sa dérivée partielle par rapport à α jouit de la même propriété. La règle de Leibnitz s'applique donc à l'intégrale transformée (aux limites constantes 0 et 1) ; elle donne

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} + f \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \alpha} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t}\, dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(f \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + \left[f \frac{dx}{\partial \alpha} \right]_{t=0}^{t=1}$$

C'est, sous une autre forme, la formule qu'il fallait démontrer.

Remarque. Si l'on considérait $\varphi(\alpha)$ comme une fonction composée de α par l'intermédiaire des variables x_1 et x_2, la règle de dérivation des fonctions composées conduirait au même résultat. Mais l'emploi de cette règle n'est pas légitime sans démonstration, car elle suppose des conditions de continuité dont nous nous sommes affranchis dans le cas actuel.

81. Convergence uniforme des intégrales généralisées. — Les règles précédentes et la continuité même de $\varphi(\alpha)$ reposent sur les hypothèses : 1° que $f(x, \alpha)$ et sa dérivée partielle (s'il s'agit de la règle de Leibnitz) sont des fonctions continues ; 2° que l'intervalle d'intégration est limité. Ces règles peuvent tomber en défaut pour les intégrales généralisées, et, pour reconnaître quand elles demeurent légitimes, il est commode d'introduire une notion nouvelle, celle de la *convergence uniforme* des intégrales généralisées. Nous nous bornerons ici aux premières notions sur cette question. Il y a deux cas principaux à considérer :

1° Examinons d'abord le cas où la fonction est continue sous le signe $\int$ mais où une limite de l'intégrale est infinie. Soit donc

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Nous dirons que *cette intégrale converge uniformément pour un certain mode de variation de* α, *par exemple dans l'intervalle* (α_0, α_1), *si à tout nombre positif* ε *si petit qu'il soit correspond un nombre* X, *indépendant de* α, *tel qu'on ait, sous la condition* $X' > X$, *et pour toutes les valeurs considérées de* α,

$$\left| \int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

2° Considérons, en second lieu, le cas où la fonction $f(x, \alpha)$ peut croître indéfiniment pour certaines valeurs de x et α, mais est continue en tout point aux environs duquel elle reste finie. Ce cas est plus complexe que le précédent, car la répartition des points de discontinuité dans le plan (x, α) peut être plus ou moins compliquée. Ces points peuvent être isolés ou bien se suivre d'une manière continue sur certaines lignes. Pour simplifier, nous nous bornerons au cas le plus simple mais le plus fréquent, celui où $f(x, \alpha)$ n'est infinie que pour un nombre limité de valeurs de x indépendantes de α.

Cette condition peut se réaliser de deux manières différentes, soit que $f(x, \alpha)$ ne devienne infinie qu'en des points isolés du plan (x, α) soit qu'elle devienne infinie le long de certaines droites parallèles à l'axe des x. Les deux intégrales suivantes sont des exemples de ces deux cas :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \qquad \int_0^1 x^{-\alpha}(1 - x)\, dx.$$

Dans la première, la fonction sous le signe n'est infinie qu'en un point isolé (l'origine) ; dans la seconde, elle est discontinue tout le long de l'axe des α positifs. Dans les définitions et les théorèmes qui vont suivre, cette distinction est indifférente.

Sous les conditions précédentes, l'uniformité de la convergence des intégrales de fonctions discontinues est tout analogue à celle des intégrales à limites infinies et les théorèmes relatifs à ces diverses intégrales vont s'énoncer dans les mêmes termes.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

où nous supposerons que $f(x, \alpha)$ ne devient infinie que pour $x = b$. Nous dirons *qu'elle converge uniformément pour un certain mode de variation de α, si à tout nombre positif ε si petit qu'il soit correspond un autre nombre positif δ indépendant de α et tel qu'on ait, sous la condition* $0 < \delta' < \delta$,

$$\left| \int_{b-\delta'}^{b} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

On voit immédiatement comment il faut modifier la définition précédente si c'est pour $x = a$ que f est ou peut devenir infinie. Si cette fonction peut devenir infinie pour plusieurs valeurs $x_1, x_2, \ldots$ de x, on partagera l'intervalle d'intégration et, en même temps, l'intégrale proposée en plusieurs autres dans lesquels f ne devient infinie qu'à l'une des limites. Enfin, si f a des points de discontinuité en nombre limité et si, de plus, l'intégrale est à limite infinie, le partage pourra se faire en plusieurs intégrales pareilles aux précédentes avec en plus une intégrale de fonction continue mais à limite infinie. Si chacune de ces intégrales composantes converge uniformément, il en sera de même pour la proposée.

On va s'assurer dans un instant que, malgré le passage à la limite nouveau que comporte leur définition, les intégrales uniformément convergentes conservent certaines propriétés très importantes des intégrales proprement dites. Il est donc utile de savoir reconnaître l'uniformité de la convergence. La règle suivante est loin d'être générale, mais elle suffit dans beaucoup de cas.

82. Criterium de convergence uniforme. — *Une intégrale généralisée qui dépend d'un paramètre converge uniformément si ses éléments successifs ne surpassent pas en valeur absolue les éléments correspondants d'une intégrale absolument convergente, prise entre les mêmes limites, mais ne renfermant pas le paramètre.*

Nous pouvons borner la démonstration au cas d'une intégrale à limite infinie car elle est analogue pour les autres cas. Comparons donc les deux intégrales :

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx, \qquad \int_a^\infty |\varphi(x)|\, dx,$$

en supposant que la seconde converge et qu'on ait constamment $|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$. On aura évidemment l'inégalité

$$\left| \int_{X'}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{X'}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx \right|.$$

Mais, puisque $\int_a^\infty |\varphi(x)|dx$ converge par hypothèse, à tout nombre ε correspond un nombre X tel que le second membre de cette inégalité soit $< \varepsilon$ pourvu que $X' $ soit $> X$. Alors le premier membre est *a fortiori* $\leq \varepsilon$, ce qui est, par définition, la condition de convergence uniforme à démontrer.

83. Théorème relatif à la continuité. — *Une intégrale généralisée qui contient un paramètre est fonction continue du paramètre dans tout intervalle où la convergence est uniforme.*

Bornons encore la démonstration au cas de l'intégrale d'une fonction continue mais à limite infinie. Soit f une fonction continue et soit l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Faisons la décomposition

$$\varphi(\alpha) = \int_a^X f(x, \alpha)\, dx + R, \qquad R = \int_X^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Pour un accroissement $\Delta\alpha$ du paramètre, on a

$$\Delta\varphi = \Delta\int_a^X f dx + \Delta R = \Delta\int_a^X f dx + (R + \Delta R) - R.$$

Pour établir que $\Delta\varphi$ tend vers 0 avec $\Delta\alpha$, il suffit de montrer que chacun des trois termes dans lesquels nous avons décomposé $\Delta\varphi$ peut être rendu inférieur en valeur absolue à tout nombre positif ε si petit qu'il soit, pourvu que $\Delta\alpha$ soit suffisamment petit. A cet effet, prenons d'abord X assez grand pour que R soit moindre que ε quel que soit α, ce qui est possible puisque la convergence est uniforme. Les deux derniers termes de la décomposition sont alors moindres que ε, $\Delta\alpha$ restant arbitraire. Quant au premier terme, c'est l'accroissement d'une intégrale aux limites finies a et X, laquelle est fonction continue de α. On peut donc rendre $\Delta\alpha$ assez petit pour que cet accroissement soit moindre que ε, ce qui achève de prouver la proposition.

84. Généralisation de la règle d'intégration sous le signe (1). — *L'intégration sous le signe d'une intégrale généralisée par rapport à un paramètre, demeure légitime dans tout intervalle fini où la convergence est uniforme.*

(1) Voir aussi le théorème du n° 75 pour le cas où f ne change pas de signe.

Bornons-nous, dans la démonstration, au cas de l'intégrale d'une fonction continue, mais à limite infinie,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Supposons qu'elle converge uniformément dans l'intervalle (α_0, α_1); elle sera fonction continue de α. Faisons la décomposition

$$\varphi(\alpha) = \int_a^X f(x, \alpha)\, dx + R, \qquad R = \int_X^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

L'interversion des intégrations ne donnant pas lieu à discussion pour l'intégrale à limite finie, il vient

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^X dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} R d\alpha.$$

Faisons tendre X vers l'infini ; la dernière intégrale tendra vers 0, car R finit par devenir inférieur en valeur absolue à tout nombre positif ε pour tous les éléments de l'intégrale sans exception ; il vient donc, à la limite,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^\infty dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f d\alpha,$$

ce qui prouve la proposition.

Remarque. — On voit que la démonstration précédente ne s'applique plus si l'intégration par rapport au paramètre se fait entre des limites infinies. D'ailleurs, dans ce cas, le théorème n'est plus vrai d'une manière générale et il faut des conditions supplémentaires pour justifier l'intégration sous le signe. Nous ne les examinerons pas ici (1). Nous rappellerons seulement que la règle n° 75 s'applique à ce cas, et cette règle suffit dans un grand nombre d'applications.

85. Théorème. — *L'intégrale généralisée étant uniformément convergente dans l'intervalle* (α_0, α_1), *on peut, par la règle précédente, intégrer sous le signe entre* α_0 *et un point variable* α *de l'intervalle* (α_0, α_1), *je dis que la nouvelle intégrale ainsi obtenue sera encore uniformément convergente dans l'intervalle* (α_0, α_1).

Bornons-nous encore au cas de la limite infinie et considérons l'inté-

(1) Consulter, sur ce point, notre *Étude sur les intégrales à limites infinies* dans les « Annales de la société scientifique de Bruxelles », 1892.

tégrale $\varphi(\alpha)$ de la démonstration précédente. L'intégrale proposée étant uniformément convergente, à tout nombre ε correspond, par hypothèse, un nombre X tel qu'on ait, pour $X' > X$,

$$\left| \int_{X'}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Intégrons cette relation de α_0 à α et observons que α a pour maximum α_1 ; nous obtenons l'inégalité

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \left| \int_{X'}^{\infty} f dx \right| < \varepsilon\, (\alpha - \alpha_0) \leqslant \varepsilon\, (\alpha_1 - \alpha_0).$$

et *à fortiori* (l'interversion d'intégrations étant permise)

$$\left| \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_{X'}^{\infty} f dx \right| = \left| \int_{X'}^{\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f d\alpha \right| \leqslant \varepsilon\, (\alpha_1 - \alpha_0)$$

Comme $\varepsilon\, (\alpha_1 - \alpha_0)$ est, en même temps que ε, un nombre positif fixe aussi petit qu'on veut, cette inégalité est précisément celle qui sert de définition à l'uniformité de convergence en question.

86. Intégration répétée. — En répétant l'application du théorème et de la règle précédente, on voit que l'intégration entre α_0 et α d'une intégrale uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1), peut être effectuée sous le signe un nombre quelconque de fois de proche en proche et que l'intégrale obtenue après un nombre quelconque d'intégrations sera uniformément convergente dans le même intervalle que la proposée.

87. Généralisation de la règle de Leibnitz. — *Lorsque la dérivation sous le signe d'une intégrale proprement dite ou d'une intégrale généralisée (supposée existante) conduit à une intégrale généralisée, la règle de Leibnitz demeure légitime, c'est-à-dire que l'intégrale proposée a pour dérivée l'intégrale fournie par la règle, pourvu que cette dernière intégrale converge uniformément dans le voisinage de la valeur du paramètre.*

Il n'y a qu'à reproduire la démonstration du nº 79, car l'interversion d'intégrations sur laquelle elle repose demeure légitime en vertu du théorème précédent.

§ 4. Calcul d'intégrales définies par des artifices divers.

88. Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. — Dans le premier volume (n° 193), nous avons obtenu les deux intégrales suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ \int e^{ax} \sin bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{cases}$$

On en conclut, comme cas particulier,

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Tous les éléments de cette intégrale deviennent maxima et positifs pour $\alpha = 0$, et comme l'intégrale converge encore pour cette valeur, elle converge uniformément de quelque manière que varie α (n° 82). Intégrons donc deux fois de suite de 0 à α, ce qui se fera sous le signe (n° 86) ; il vient

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \int_0^\alpha \text{arc tg}\, \alpha \, d\alpha = \alpha \, \text{arc tg}\, \alpha - \frac{\text{Log}(1 + \alpha^2)}{2}$$

Supposons α positif et changeons x en $x : \alpha$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \text{arc tg}\, \alpha - \frac{\text{Log}(1 + \alpha^2)}{2\alpha}.$$

Considérons cette intégrale comme dépendant du paramètre $1 : \alpha$; tous ses éléments deviennent maxima et positifs pour $1 : \alpha = 0$, valeur qui laisse l'intégrale convergente. Donc l'intégrale converge uniformément pour les valeurs nulle ou positives de $1 : \alpha$ et elle est fonction continue de $1 : \alpha$ (n° 83). Faisons donc tendre α vers l'infini ou $1 : \alpha$ vers 0 ; il vient, à la limite,

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale (3) en donne d'autres. On peut d'abord intégrer par parties en considérant $dx : x^2$ comme une différentielle, ce qui donne l'intégrale du titre. On peut ensuite remplacer $1 - \cos x$ par $2 \sin^2 (x : 2)$ et prendre $x : 2$ comme variable d'intégration. On trouve ainsi les deux résultats :

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

89. Remarques sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. — Soit α un paramètre positif. Changeons la variable d'intégration x en αx dans l'intégrale (4), ce qui n'altère pas les limites ; il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{si } \alpha > 0.$$

Donc, pour α positif, cette intégrale a une valeur constante indépendante de α. Si l'on change le signe de α, tous les éléments de l'intégrale changent de signe, donc l'intégrale aussi, sa valeur sera donc $-\pi : 2$. Enfin, si $\alpha = 0$, tous les éléments sont nuls, donc l'intégrale l'est aussi. En résumé,

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \text{ si } \alpha < 0, \\ 0, \text{ si } \alpha = 0, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ainsi cette intégrale est une fonction discontinue du paramètre, sa valeur change brusquement quand α atteint ou dépasse la valeur 0. On peut en conclure, à cause du théorème du n° 83, que la convergence ne peut être uniforme quand α tend vers 0, ce qu'il serait d'ailleurs facile de vérifier directement.

L'intégrale (5) nous fournit, en même temps, un exemple d'une intégrale qu'il n'est pas permis de dériver sous le signe par rapport à α. La fonction étant constante, sa dérivée est nulle, tandis que la dérivation sous le signe conduit à une intégrale indéterminée.

90. Intégrales calculées par dérivation sous le signe. — I. Si, dans l'intégrale du n° 69, on change x en $x\sqrt{t}$ où t est > 0, il vient

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

En dérivant sous le signe par rapport à t, il vient

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Plus généralement, après n dérivations, on trouve, pour $t > 0$,

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{1}{t^n\sqrt{t}}.$$

Ces dérivations sont permises par le théorème du n° 87. En effet,

les intégrales ainsi obtenues convergent *uniformément* quand t varie sans descendre en dessous d'un nombre positif α, si petit soit-il. Elles convergent effectivement pour la valeur $t=\alpha$ qui rend leurs éléments maxima et positifs.

II. Considérons ensuite l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$; il vient encore, par le théorème du n° 87,

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\alpha}=-\int_0^\infty 2x\,e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx.$$

En effet, cette intégrale converge *uniformément*, car ses éléments sont inférieurs en valeur absolue à ceux de l'intégrale convergente et à élément positifs qu'on en déduit par la suppression du facteur $\sin 2\alpha x$. Mais, en considérant $-2x\,e^{-x^2}dx$ comme la différentielle de e^{-x^2}, cette intégrale se ramène à la proposée par une intégration par parties. On trouve

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\alpha}=-2\alpha\mathrm{I},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{d\mathrm{I}}{\mathrm{I}}=-2\alpha d\alpha,\qquad \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}=e^{-\alpha^2}$$

Observons que $\mathrm{I}_0=\sqrt{\pi}:2$ (n° 69), il vient

$$(9)\qquad \mathrm{I}=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha^2}$$

91. Intégrales de la diffraction. — Revenons à l'intégrale (6)

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}},$$

qui, comme on l'a vu, converge *uniformément* si t varie sans descendre en dessous d'un nombre positif α. Multiplions cette équation par $\sin t$, ce qui, l'élément de l'intégrale étant diminué, n'altère pas l'uniformité de la convergence, puis intégrons par rapport à t entre deux nombres positifs α et $\beta>\alpha$; on peut intégrer sous le signe et il vient

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_\alpha^\beta e^{-tx^2}\sin t\,dt$$

En effectuant l'intégration sous le signe par la formule (1), il vient

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\alpha\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x^2}x^2dx}{1+x^4}+\cos\alpha\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x^2}dx}{1+x^4}\right]$$
$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\beta\int_0^\infty\frac{e^{-\beta x^2}x^2dx}{1+x^4}+\cos\beta\int_0^\infty\frac{e^{-\beta x^2}dx}{1+x^4}\right]$$

Les quatre intégrales des seconds membres se réduisent pour α et $\beta = 0$ aux deux suivantes [1] :

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Les quatre intégrales en question convergent donc uniformément si α et β varient sans devenir négatifs, car elles convergent pour les valeurs $\alpha = \beta = 0$ qui rendent tous leurs éléments maxima et positifs. Faisons donc tendre α vers 0 et remplaçons β par u ; il vient, à la limite (nº 83),

$$\int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin u \int_0^\infty e^{-ux^2}\frac{x^2\,dx}{1+x^4} + \cos u \int_0^\infty e^{-ux^2}\frac{dx}{1+x^4}\right]$$

Si, au lieu de multiplier par $\sin t$ on avait multiplié par $\cos t$, on aurait obtenu, par un calcul analogue,

$$\int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\cos u \int_0^\infty e^{-ux^2}\frac{x^2\,dx}{1+x^4} - \sin u \int_0^\infty e^{-ux^2}\frac{dx}{1+x^4}\right]$$

Les intégrales des premiers membres dans ces deux dernières relations se rencontrent dans la théorie de la *diffraction*. Ces relations sont dues à Gilbert et elles jouent un rôle important dans cette théorie.

Si l'on fait croître u à l'infini, les intégrales qui multiplient $\sin u$ et $\cos u$ décroissent constamment et tendent vers 0. En effet, en négligeant x^4 au dénominateur, on voit qu'elles sont respectivement moindres que les suivantes, obtenues au nº précédent :

$$\int_0^\infty e^{-ux^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}, \qquad \int_0^\infty e^{-ux^2}x^2\,dx = \frac{1}{4u}\sqrt{\frac{\pi}{u}}.$$

On aura donc, à la limite, pour $u = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

[1] Celles-ci sont égales entre elles, car elles se réduisent l'une à l'autre en changeant x en $1 : x$; elles sont donc aussi égales à leur demi-somme et l'on a effectivement

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2-x\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Si, dans celles-ci, on change encore t en $\frac{\pi}{2}x^2$, il vient

$$(10) \qquad \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}x^2 dx = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}.$$

On donne à ces dernières intégrales le nom *d'intégrales de la diffraction.*

92 Limite pour $k = \infty$ de $\int_a^b f(x)\sin kx\,dx$. — Soit $f(x)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée dans l'intervalle (a, b) ; on a, par une intégration par parties,

$$\int_a^b f(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\Big[f(x)\cos kx\Big]_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos kx\,dx.$$

Si l'on fait tendre k vers l'infini, les quantités qui multiplient $1 : k$ dans le second membre conservent une valeur finie, car f et f' sont supposés finis et le cosinus ne peut pas surpasser l'unité. Il vient donc

$$(11) \qquad \lim_{k=\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\,dx = 0.$$

Ce résultat en fournit un autre. Soit encore $f(x)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée dans l'intervalle de 0 à a $(a > 0)$. On a

$$\int_0^a f(x)\frac{\sin kx}{x}dx = f(0)\int_0^a \frac{\sin kx}{x}dx + \int_0^a \frac{f(x) - f(0)}{x}\sin kx\,dx.$$

Faisons tendre k vers l'infini et considérons les deux intégrales du second membre. La seconde tend vers 0 d'après l'équation (11), car $[f(x) - f(0)] : x$ est fonction continue de x même si x tend vers 0 [auquel cas ce quotient tend vers $f'(0)$]. La première intégrale tend vers $\frac{\pi}{2}$, car on a, par l'équation (4),

$$\lim\int_0^a \frac{\sin kx}{x}dx = \lim\int_0^{ka}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Il vient donc $(a > 0)$

$$(12) \qquad \lim_{k=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin kx}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Les relations (11) et (12) jouent un rôle important dans l'étude des séries de Fourier. Nous les retrouverons plus tard. Mais on a souvent l'occasion de les employer dans la transformation des intégrales définies. En voici un exemple :

93. Calcul de $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha t}{1+t^2}\,dt$. — On a

$$\int_0^\alpha e^{ax}\cos tx\,dx = \left[\frac{e^{ax}(a\cos tx + t\sin tx)}{a^2+t^2}\right]_0^\alpha$$

Posons successivement $a = +1$ puis $a = -1$ et intégrons chaque fois les deux membres de 0 à k par rapport à t. Il vient

$$\int_0^\alpha e^x \frac{\sin kx}{x}\,dx = e^\alpha\left[\int_0^k \frac{\cos \alpha t}{1+t^2}\,dt + \int_0^k \frac{t\sin \alpha t}{1+t^2}\,dt\right] - \operatorname{arc\,tg} k,$$

$$\int_0^\alpha e^{-x}\frac{\sin kx}{x}\,dx = e^{-\alpha}\left[-\int_0^k \frac{\cos \alpha t}{1+t^2}\,dt + \int_0^k \frac{t\sin \alpha t}{1+t^2}\,dt\right] + \operatorname{arc\,tg} k.$$

Si α est positif et si l'on fait tendre k vers ∞, les deux intégrales du premier membre ont pour limite $\pi : 2$ (équation **12**) et arc tg k a la même limite. Donc en résolvant les deux équations précédentes par rapport aux intégrales des seconds membres, il vient, pour $\alpha > 0$,

$$(13) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos \alpha t}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{t\sin \alpha t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}.$$

94. Intégrales de Frullani. — On donne ce nom à certaines intégrales dont la valeur se détermine par la considération d'une intégrale singulière. Soit $f(x)$ une fonction continue de x, telle que l'intégrale à limite infinie

$$\int_A^\infty f(x)\frac{dx}{x} \qquad (A > 0)$$

ait une valeur déterminée ; soient ensuite a et b deux constantes positives ; l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx$$

est une intégrale de *Frullani*. Pour en déterminer la valeur, écrivons

$$I = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{a\varepsilon}^\infty - \int_{b\varepsilon}^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon=0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}.$$

La valeur de cette intégrale singulière s'obtient par le théorème de la moyenne. Soit ξ une quantité comprise entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$ et qui tend vers 0 avec ε, on a

$$\lim \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = \lim f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dx}{x} = f(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

Par conséquent,

$$(14)\qquad \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\operatorname{Log}\frac{b}{a}.$$

Par exemple, prenant $f(x)=\cos x$, puis $f(x)=e^{-x}$, il vient $(a>0)$

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x - \cos ax}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx = \operatorname{Log} a.$$

Souvent une intégrale peut se ramener à la forme (**14**) par un changement de variables. Ainsi, par la relation $x=e^{-z}$, il vient (a et $b>-1$)

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\operatorname{Log} x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(b+1)z}}{z}\,dz = \operatorname{Log}\frac{b+1}{a+1}$$

Exercices.

1\. On a, par la relation $x=\operatorname{tg}\varphi$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{8}\operatorname{Log} 2$$

En effet, $(1+\operatorname{tg}\varphi)$ peut s'écrire $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right):\cos\varphi$ et est par conséquent un produit de trois facteurs ; donc l'intégrale peut se décomposer en une somme de trois autres. On voit de suite que les deux dernières se détruisent et la première donne la valeur cherchée.

2\. Déduire la seconde intégrale ci-dessous de la première :

$$2\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi},\qquad \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

R. On intègre par rapport à α de a et b et change x en $1:x$.

3\. Montrer que l'on a, si a est >0,

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-a},\qquad \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

R. Les deux relations sont équivalentes. La seconde intégrale a pour dérivée par rapport à a l'expression

$$\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,dx - \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,\frac{a\,dx}{x^2},$$

qui est nulle car ces deux intégrales se détruisent (elles se ramènent l'une à l'autre en changeant x en $a:x$). La seconde des deux intégrales pro-

posées est donc constante par rapport à a et on la détermine en posant $a = 0$.

4. Montrer (en développant en série par rapport à a) que l'on a

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos x} \cos (a \sin x)\, dx.$$

5. Montrer, en développant Log $(1 + x)$ en série potentielle, que l'on a (la série numérique étant connue)

$$\int_0^1 \text{Log}\,(1 + x) \frac{dx}{x} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

§ 4. Intégration des différentielles totales.

96. Cas de deux variables indépendantes. — Soient x et y deux variables indépendantes, P (x, y) et Q (x, y) deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles premières. On dit que l'expression $P\,dx + Q\,dy$ est une *différentielle exacte* s'il existe une fonction u des deux variables x et y dont cette expression soit la différentielle totale, en sorte qu'on ait

$$(1) \qquad du = P\,dx + Q\,dy.$$

En général l'expression $P\,dx + Q\,dy$ n'est pas une différentielle exacte. En effet, la relation (1) revient, par définition, aux deux suivantes :

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Les seconds membres étant égaux, on voit que $Pdx + Qdy$ ne peut être une différentielle exacte que si l'on a *identiquement*, c'est-à-dire x et y restant arbitraires et indépendants,

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Telle est la condition *nécessaire* pour que $Pdx + Qdy$ soit une différentielle exacte. J'ajoute que cette condition nécessaire est aussi *suffisante* et pour le prouver, je vais montrer que, si elle a lieu, l'intégrale u de l'équation (1) s'obtiendra par deux quadratures.

La fonction inconnue u est d'abord assujettie à la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{P}(x, y).$$

Soit a une constante choisie à volonté, l'intégrale définie

$$\int_a^x \mathrm{P}(x, y)\, dx$$

effectuée en considérant y comme une constante, est une solution particulière de cette équation. La solution générale s'obtient en lui ajoutant une constante arbitraire par rapport à x, c'est-à-dire ici une fonction arbitraire $\varphi(y)$. Nous poserons donc

$$(3) \qquad u = \int_a^x \mathrm{P}(x, y)\, dx + \varphi(y).$$

Il reste à déterminer, si c'est possible, la fonction φ de manière à vérifier la seconde condition

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Q}(x, y),$$

c'est-à-dire, à cause de (**3**) et par la règle de Leibnitz,

$$\int_a^x \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\, dx + \varphi'(y) = \mathrm{Q}(x, y).$$

Mais on a, en vertu de l'identité (**2**), supposée vérifiée,

$$\int_a^x \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\, dx = \int_a^x \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\, dx = \mathrm{Q}(x, y) - \mathrm{Q}(a, y),$$

ce qui réduit la relation précédente à

$$\varphi'(y) = \mathrm{Q}(a, y), \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(y) = \int \mathrm{Q}(a, y)\, dy.$$

Enfin, en substituant cette valeur de φ dans (**3**), et en mettant en évidence la constante C comprise dans l'intégrale indéfinie, on trouve

$$(4) \qquad u = \int_a^x \mathrm{P}(x, y)\, dx + \int \mathrm{Q}(a, y)\, dy + \mathrm{C}.$$

On voit donc qne, si la condition (**2**) a lieu, l'équation (**1**) admet une infinité d'intégrales ne différant l'une de l'autre que par la valeur de la constante d'intégration C.

La constante a pouvant être prise à volonté, on la choisira, dans chaque cas particulier, de manière à simplifier autant que possible les intégrations.

Il est clair qu'on aurait pu procéder dans l'ordre inverse et commencer l'intégration par rapport à y. Alors, b désignant une constante choisie à volonté, on aurait obtenu

$$(5) \qquad u = \int_b^y Q(x, y)\, dy + \int P(x, b)\, dx + C.$$

Soit, par exemple, l'expression

$$(3x^2 + 2y)\, dx + 2(x + y)\, dy.$$

C'est une différentielle exacte, car on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2.$$

Calculons son intégrale en faisant $a = 0$ dans la formule (4) ; il vient

$$u = \int_0^x (3x^2 + 2y)\, dx + \int 2y\, dy = x^3 + 2xy + y^2 + C.$$

97. Remarque. — Les formules (4) et (5) supposent les fonctions P et Q continues ainsi que leurs dérivées premières pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui interviennent dans les formules. Si ces conditions sont réalisées dans tout le plan, il n'y a aucune difficulté. Plus généralement, si elles sont réalisées dans le rectangle R compris entre les abscisses a_1 et a_2, les ordonnées b_1 et b_2, la formule (4) sera applicable dans ce rectangle à la condition de choisir a entre a_1 et a_2 et la formule (5) à la condition de choisir b entre b_1 et b_2. En effet tous les systèmes de valeurs de x, y à considérer dans ces formules restent alors compris dans le rectangle R.

Nous reviendrons d'ailleurs sur la représentation analytique de l'intégrale dans le paragraphe suivant, en nous plaçant à un point de vue nouveau, qui permet un examen plus approfondi de la question.

98. Cas de trois variables indépendantes. — La méthode précédente s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais il suffira de développer les calculs pour trois variables. Soient P, Q, R trois fonctions continues de x, y, z ainsi que leurs dérivées premières. On dit que l'expression

$$(6) \qquad P dx + Q dy + R dz.$$

est une *différentielle exacte*, s'il existe une fonction u des trois variables x, y, z dont elle est la différentielle totale. Il faut, pour cela que u satisfasse aux trois équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Comme les dérivées secondes sont indépendantes de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations, on obtient *trois conditions nécessaires* pour que l'expression proposée soit une différentielle exacte, savoir

$$(7)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*, car nous allons montrer que si elles ont lieu, l'intégrale u de l'expression (6) s'obtiendra par des quadratures.

En effet, cette intégrale a d'abord P comme dérivée par rapport à x, donc elle est comprise dans la formule générale

$$(8)\qquad u = \int_a^x P(x, y, z)\, dx + \varphi(y, z),$$

où a est une constante choisie à volonté et φ une fonction arbitraire de y et z.

Pour que u ait pour différentielle totale l'expression (6), il faut encore que l'on ait

$$(9)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = Q dy + R dz.$$

Mais on a, par la règle de Leibnitz et en observant que P'_y, étant identique à Q'_x, s'intègre immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) - Q(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

De même,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) - R(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Par ces relations l'équation (9) se réduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi = Q(a, y, z)\, dy + R(a, y, z)\, dz.$$

Donc la détermination de φ dépend de l'intégration d'une expression différentielle à deux variables. La condition d'intégrabilité est vérifiée en vertu des équations (7). Donc φ se détermine par la méthode établie précédemment (n° 96). En désignant par b une nouvelle constante choisie à volonté, et en remplaçant φ par sa valeur dans (8), on voit que l'expression (6) a une infinité d'intégrales comprises dans la formule générale

$$(10) \qquad u = \int_a^x \mathrm{P}(x,y,z)\,dx + \int_b^y \mathrm{Q}(a,y,z)\,dy + \int \mathrm{R}(a,b,z)\,dz.$$

Les conditions de continuité supposées dans la démonstration précédente appellent évidemment une remarque analogue à celle du numéro (97).

§ 6. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites.

Retour sur l'intégration des différentielles totales.

99. Hypothèses à faire. — Soient P et Q deux fonctions continues de x et de y dans une aire D. La définition de l'intégrale curviligne.

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy,$$

effectuée sur une ligne C tracée dans l'aire D, a été donnée au n° 12 sous la forme la plus élémentaire, en admettant que le contour d'intégration se compose d'un certain nombre d'arcs consécutifs sur chacun desquels x et y varient constamment dans le même sens ou sont constants. Nous supposerons de plus que les équations de la courbe C sont données sous forme paramétrique, c'est à-dire que x et y sont des fonctions de t et que le point (x,y) décrit la ligne d'intégration quand t varie de t_0 à T. Nous admettrons enfin que x et y ont des dérivées continues par rapport à t dans l'intervalle (t_0, T), sauf peut-être en un nombre déterminé de points où ces dérivées passent brusquement d'une valeur à une autre (ce qui arrive si la courbe se compose d'arcs consécutifs dont les directions ne se raccordent pas).

Sous ces conditions, l'intégrale curviligne se ramène à une intégrale définie ordinaire en prenant t comme variable d'intégration. Elle prend la forme

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{P}\,\frac{dx}{dt} + \mathrm{Q}\,\frac{dy}{dt}\right) dt,$$

déjà indiquée au n° 12.

Les restrictions précédentes permettent de simplifier singulièrement les démonstrations, mais on peut s'en passer. Il importe de montrer que tous les théorèmes du présent paragraphe sont vrais pour *les courbes rectifiables* et les intégrales curvilignes dans le sens le plus général (t. I, n°s 303 et 304). Nous aurons donc soin de donner, en petit texte, les compléments de démonstrations nécessaires à cet objet.

100. Changement des variables dans les intégrales curvilignes. — Considérons les formules de transformation

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Supposons : 1° que φ et ψ admettent des dérivées partielles continues dans une aire D′ du plan uv ; 2° que le point (x, y) varie dans une aire D quand (u, v) varie dans D′ ; 3° que (x, y) décrive dans D la courbe C, quand (u, v) décrit la courbe L dans D′.

Je dis que l'on aura

$$(2) \qquad \int_C P(x, y)\,dx = \int_L P(\varphi, \psi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right).$$

En effet, si (u, v) décrit la ligne L quand t varie de t_0 à T, (x, y) décrit en même temps la ligne C. Donc, si l'on prend t comme variable d'intégration, les deux membres de (2) se transforment respectivement dans les deux expressions suivantes :

$$\int_{t_0}^{T} P\,\frac{dx}{dt}\,dt, \qquad \int_{t_0}^{T} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt,$$

où les deux fonctions de t à intégrer sont égales.

On prouve, de même, que

$$(3) \qquad \int_C Q(x, y)\,dy = \int_L Q(\varphi, \psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv\right).$$

Telles sont les *formules de transformation* de l'intégrale relative à x, y dans une intégrale relative à u, v Cette démonstration suppose, bien entendu, que les courbes C et L satisfassent aux hypothèses du n° précédent. On en conclut la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour changer de variables dans une intégrale curviligne, il suffit de faire le changement sous le signe d'intégration et de prendre la ligne* L *parcourue par les nouvelles variables comme nouvelle ligne d'intégration.*

Plaçons nous maintenant au point de vue plus général des courbes rectifiables. Il faut une nouvelle démonstration. Tout d'abord, les conditions d'applicabilité de la règle se précisent par le théorème suivant, qui a lieu sous les trois conditions énumérées au début du numéro :

Si la ligne L *décrite par le point* (u, v) *dans* D′ *est rectifiable, celle* C *décrite par* (x, y) *dans* D *l'est aussi.*

Il suffit de montrer (t. I, n° 303) que le périmètre d'un polygone inscrit dans C a une limite supérieure. Pour cela, inscrivons dans les courbes C et L deux polygones dont les sommets se correspondent par

les formules de transformation. Désignons, en général, par c et l deux côtés correspondants de ces polygones, par Δu et Δv les accroissements de u et v sur l, par Δx et Δy ceux de x et y sur c. On aura

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \qquad l = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

La formule de Taylor bornée à un terme (t. I, n° 132) donne $(0 < \theta < 1)$:

$$(4) \qquad \Delta x = \Delta \varphi = \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v}\right) \varphi\,(u + \theta \Delta u,\ v + \theta \Delta v)$$

et on en conclut, M étant une limite supérieure absolue des dérivées partielles de φ et de ψ dans l'aire D′, que Δx (et pareillement Δy) est inférieur en valeur absolue à $M \mid \Delta u \mid + M \mid \Delta v \mid$ et *a fortiori* à $2Ml$. Il vient donc

$$c < \sqrt{4M^2l^2 + 4M^2l^2} < 3Ml.$$

Donc, si l'on désigne aussi par L la longueur de la ligne L, le périmètre Σc ne surpassera pas $3M\Sigma l$ ni *a fortiori* la limite fixe 3ML. La courbe C est donc rectifiable.

Ceci posé, nous allons établir la formule (2) en prouvant que la différence des intégrales des deux membres est nulle.

Considérons toujours les deux polygones inscrits dans L et C et conservons les notations de la démonstration précédente. Par définition de ces deux intégrales, leur différence est la limite de la somme

$$\Sigma P \left(\Delta x - \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u - \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v\right),$$

qui, par la formule (4), prend la forme

$$\Sigma P \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v}\right) \left[\varphi\,(u + \theta\, \Delta u,\ v + \theta\, \Delta v) - \varphi\,(u, v)\right].$$

Cette somme a pour limite 0 avec tous les Δu et Δv. En effet, P ayant un maximum absolu et les dérivées partielles étant continues, les coefficients de Δu et Δv finissent par décroître en valeur absolue en dessous de tout nombre positif ε, et cela dans tous les termes à la fois. Alors leur somme est moindre en valeur absolue que

$$\Sigma \varepsilon \mid \Delta u \mid + \Sigma \varepsilon \mid \Delta v \mid < \Sigma\, 2\varepsilon l < 2\varepsilon L,$$

quantité aussi petite que l'on veut avec ε.

101. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites. — En général, l'intégrale curviligne effectuée sur une ligne C, tracée dans le plan xy et allant du point (x_0, y_0) au point (X, Y), dépend non seulement de ces deux points, mais aussi du tracé de la ligne. L'inté-

grale devient particulièrement intéressante à considérer, lorsque sa valeur ne dépend que des extrémités de la ligne d'intégration et du sens du parcours. Dans ce cas, il est naturel de faire apparaître cette propriété dans la notation elle-même, qui rappellera celle des intégrales ordinaires ; l'intégrale effectuée de (x_0, y_0) à (X, Y) sur une ligne arbitraire se désignera donc par

$$\int_{x_0,y_0}^{X,Y} Pdx + Qdy$$

et l'on dira que *l'intégrale curviligne ne dépend que de ses limites*. Nous allons étudier sous quelles conditions il en sera ainsi. Le théorème suivant montre déjà l'étroite relation de cette question avec celle des différentielles exactes étudiées dans le paragraphe précédent.

102. Théorème I. — *Si* $Pdx + Qdy$ *est la différentielle totale d'une fonction* $F(x, y)$, *uniforme dans l'aire* D (*c'est-à-dire n'ayant qu'une seule valeur en chaque point de l'aire*), *l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépendra que de ses limites sur toute ligne de l'aire* D *et elle sera égale à l'accroissement de* F *entre les extrémités de la ligne d'intégration.*

En effet, soient C la ligne d'intégration, (x_0, y_0) et (X, Y) ses extrémités, t_0 et T les valeurs correspondantes du paramètre t. Prenons t comme variable d'intégration ; il vient

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{t_0}^{T} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{T} \frac{dF}{dt}\, dt.$$

Par conséquent,

$$\int_C Pdx + Qdy = F(X, Y) - F(x_0, y_0), \tag{5}$$

ce qui prouve la proposition. On peut donc écrire, dans ce cas comme dans celui des quadratures ordinaires,

$$\int_{x_0,y_0}^{X,Y} Pdx + Qdy = \int_{x_0,y_0}^{X,Y} d\,F(x, y) = \Big[F(x, y)\Big]_{x_0,y_0}^{X,Y}$$

Au point de vue plus général des courbes rectifiables, il faut une nouvelle démonstration. Posons

$$u = F(x, y), \qquad v = 0.$$

Quand le point (x, y) décrit la ligne C, le point (u, v) se meut sur l'axe des u et décrit une ligne rectifiable L (qui peut se superposer partiellement à elle-même, même un nombre infini de fois, s'il y a des rétrogradations dans le mouvement du point u, v). Quoi qu'il arrive, on a, par la règle du changement des variables,

$$\int_{L} du = \int_{C} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = \int_{C} P dx + Q dy.$$

L'intégrale de du sur L est, par définition (*t.* I, n° 304), la limite de la somme $\Sigma \Delta u$ d'une suite d'accroissements consécutifs de u entre les valeurs extrêmes $u_0 = F(x_0, y_0)$ et $U_0 = F(X, Y)$, somme toujours égale à $U - u_0$. Donc l'intégrale de du sur L et, par conséquent, celle de $P\,dx + Q\,dy$ sur C sont aussi égales à $U - u_0$, ce qui établit la formule (5).

103. Théorème II. — *Si l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépend que de ses limites sur toute ligne polygonale de l'aire* D, $Pdx + Qdy$ *est la différentielle totale d'une fonction* $F(x, y)$ *uniforme dans l'aire* D *et, par conséquent, en vertu du théorème précédent, l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépend non plus que de ses limites sur toute ligne courbe de l'aire* D.

En effet, soient (x_0, y_0) un point fixe et (X, Y) un point variable dans l'intérieur de D. Désignons par

$$F(X, Y) = \int_{x_0, y_0}^{X, Y} P\, dx + Q\, dy$$

l'intégrale effectuée sur un contour polygonal arbitraire entre ces deux points. Cette fonction F (X, Y) est uniforme par hypothèse, il reste donc à montrer qu'elle a pour dérivées partielles P et Q.

Laissons Y fixe et donnons à X un accroissement infiniment petit $\Delta X = h$. Pour calculer la nouvelle intégrale, on peut choisir un polygone d'intégration ayant pour dernier côté la droite qui joint le point (X, Y) à $(X + h, Y)$. L'accroissement ΔF se réduit alors à l'intégrale sur ce dernier côté, où y est constant et dy nul, c'est-à-dire à l'intégrale définie ordinaire

$$\Delta F = \int_{X}^{X+h} P(x, Y)\, dx.$$

On en déduit, par le théorème de la moyenne, $\Delta F = P(X + \theta h)\, \Delta X$ et, par conséquent,

$$F'_X = \lim \frac{\Delta F}{\Delta X} = P(X, Y)\,; \qquad \text{de même,} \quad F'_Y = Q.$$

En rapprochant les deux théorèmes précédents, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante :

104. Théorème III. — *Si* P *et* Q *sont des fonctions continues de* x *et de* y *dans l'aire* D, *la condition nécessaire et suffisante pour que*

l'intégrale curviligne de $P\,dx + Q\,dy$ *ne dépende que de ses limites dans l'intérieur de* D, *est que* $P\,dx + Q\,dy$ *soit la différentielle totale d'une fonction uniforme dans cette aire.*

105. Nous sommes ainsi ramenés à étudier dans quel cas $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle totale d'une fonction uniforme. Jusqu'ici nous avons énoncé les théorèmes indépendamment de toute hypothèse sur les dérivées de P et de Q et sur la forme de l'aire D. Dorénavant nous admettrons que l'aire D est *à contour simple* et que les fonctions P et Q admettent deux dérivées partielles P'_y et Q'_x *déterminées* et *continues* dans cette aire. Dans ce cas, on sait déjà que $P\,dx + Q\,dy$ ne peut être la différentielle d'une fonction F que si P'_y et Q'_x sont identiques (comme égaux tous deux à F''_{xy}). Nous allons compléter ce résultat par le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si* P *et* Q *et les dérivées* P'_y *et* Q'_x *sont des fonctions uniformes et continues de* x *et de* y *dans une aire* D *à contour simple, la condition nécessaire et suffisante pour que* $P\,dx + Q\,dy$ *soit la différentielle totale d'une fonction* $F(x, y)$ *uniforme dans l'intérieur de* D, *donc aussi* (Théor. III) *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de* $P\,dx + Q\,dy$ *ne dépende que de ses limites sur toute courbe tracée dans* D, *est que l'on ait l'identité* $P'_y = Q'_x$ *dans l'intérieur de l'aire* D.

Commençons par un calcul préalable, qui fournit déjà une expression analytique importante de l'intégrale F dans une aire limitée par un contour convexe.

Soient x_0, y_0 un point fixe et X, Y un point variable de l'aire D. Faisons varier le point X, Y de telle façon que la droite qui joint ces deux points ne sorte pas de l'aire D. L'intégrale, effectuée en ligne droite entre ces deux points,

$$F(X, Y) = \int_{x_0, y_0}^{X, Y} P\,dx + Q\,dy$$

est une fonction uniforme de X, Y. Nous allons voir que $F(x, y)$ est une intégrale de $P\,dx + Q\,dy$. D'abord $F(X, Y)$ se ramène immédiatement à une intégrale ordinaire, en posant

$$x = x_0 + (X - x_0)\,t, \qquad y = y_0 + (Y - y_0)\,t,$$

car le point (x, y) décrit la droite d'intégration quand t varie de 0 à 1.

Donc, en prenant t comme variable d'intégration, il vient

$$(6) \quad F(X, Y) = \int_0^1 [P(x, y)(X - x_0) + Q(x, y)(Y - y_0)] dt.$$

Je dis que F *a pour dérivées partielles* P *et* Q. En effet, par la règle de Leibnitz, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \int_0^1 \left[\frac{\partial P}{\partial x} (X - x_0) t + \frac{\partial Q}{\partial x} (Y - y_0) t + P \right] dt$$

et, à cause de l'identité $Q'_x = P'_y$

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \int_0^1 \left(t \frac{dP}{dt} + P \right) dt = \int_0^1 t \frac{dP}{dt} dt + \int_0^1 P dt$$

Enfin, après une intégration par parties sur le premier terme, les intégrales se détruisent et il vient, les limites se rapportant à t,

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \Big[tP \Big]_0^1 = P(X, Y).$$

La démonstration est analogue pour l'autre dérivée partielle.

Si l'aire D est limitée par un contour convexe, le point X, Y peut parcourir cette aire tout entière. Le théorème est donc démontré et la formule (6) fournit une expression analytique très simple de l'intégrale F par une seule quadrature.

Si l'aire D n'est pas limitée par un contour convexe, l'expression (6) peut n'être plus valable pour l'aire tout entière et il faut une nouvelle démonstration. Mais, le résultat acquis va nous servir, car nous savons que, pour établir le théorème, il suffit, en vertu du théorème II (n° 103), de prouver que l'intégrale de $Pdx + Qdy$ ne dépend que de ses limites sur un contour polygonal quelconque.

Traçons donc, dans l'aire D, deux polygones ayant les mêmes extrémités mais des sommets intermédiaires différents. Comme il n'y a pas de vides dans l'aire D, il est possible de passer d'un polygone à l'autre par une suite de déformations continues, dans chacune desquelles on ne déplace qu'un seul sommet à la fois. Pour cela, on peut être amené à briser certains côtés, mais alors on imagine de nouveaux sommets aux points de brisure. Tout revient donc à démontrer que l'intégrale effectuée sur deux côtés consécutifs ne change pas quand on déplace le sommet intermédiaire.

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les deux sommets fixes, (X, Y) le sommet

intermédiaire. Comme P et Q sont uniformes, cette intégrale peut s'écrire

$$\int_{x_1, y_1}^{X, Y} (Pdx + Qdy) - \int_{x_2, y_2}^{X, Y} (Pdx + Qdy),$$

où les intégrations sont rectilignes dans chaque terme. Cette expression est bien indépendante de X et de Y, car, en vertu de notre calcul préalable, elle est la différence de deux termes qui ont, par rapport à X et à Y, les mêmes dérivées partielles P(X, Y) et Q(X, Y).

106. Remarque. — La *formule de Green* donne une vérification facile du théorème précédent. Soient L et L_1 deux chemins ayant les mêmes extrémités et qui ne se coupent pas. Soit L_1^{-1} le chemin L_1 parcouru en sens contraire. Pour que les intégrales sur L et L_1 soient égales, il faut que celles sur L et sur L_1^{-1} se détruisent. On vérifie immédiatement qu'il en est ainsi par la formule de Green, car le parcours L L_1^{-1} forme un contour fermé, enveloppant une aire A, et l'on a

$$\int_{L} + \int_{L_1^{-1}} Pdx + Qdy = \pm \iint_{A} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\, dy = 0,$$

puisque la fonction soumise à la double intégration est nulle dans toute l'aire A.

On pourrait donc chercher dans la formule de Green une démonstration du théorème précédent. Toutefois cette démonstration présente des difficultés si l'on considère deux chemins qui se coupent une infinité de fois eux-mêmes ou l'un à l'autre. De plus, elle ne s'étend pas d'elle-même à un nombre quelconque de variables. C'est à cause de cela que la démonstration précédente nous a paru préférable.

107. Représentation analytique de l'intégrale d'une différentielle totale. — Si $Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte dans une aire D à contour simple, son intégrale sera donc représentée, à une constante près, par l'intégrale curviligne

$$F(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} Pdx + Qdy,$$

effectuée entre un point fixe x_0, y_0 et un point variable x, y de l'aire D. La ligne d'intégration est arbitraire sauf qu'elle ne peut sortir de D. Le point x_0, y_0 peut être choisi à volonté ; en le faisant varier, on obtient une infinité d'intégrales qui ne diffèrent que par une constante.

La formule précédente renferme des cas particuliers intéressants :

1°) Si l'aire D est un rectangle compris entre des parallèles aux axes, on peut aller du point fixe a, b au point x, y du rectangle en suivant une parallèle à Ox puis une parallèle à Oy ou bien l'inverse. On obtient ainsi les deux expressions suivantes :

$$\int_b^y \mathrm{Q}(a, y)\, dy + \int_a^x \mathrm{P}(x, y)\, dx, \qquad \int_a^x \mathrm{P}(x, b)\, dx + \int_b^y \mathrm{Q}(x, y)\, dy,$$

qui, à la constante d'intégration près, sont celles (4) et (5) obtenues au n° 96.

2° Si l'aire D est limitée par un contour convexe, on peut aller en ligne droite du point fixe au point mobile et l'on obtient pour l'intégrale l'expression (6) que nous avons rencontrée au n° précédent. Cette dernière expression a l'avantage de ne comporter qu'une seule quadrature.

108. Extension à un nombre quelconque de variables. — L'analyse précédente s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de variables indépendantes, car la considération du polygone sur laquelle reposent les démonstrations s'étend d'elle-même à l'espace et à l'hyperespace.

Nous nous contenterons d'énoncer les résultats pour trois variables :

Soient P, Q, R trois fonctions continues et uniformes de x, y, z, admettant des dérivées partielles premières continues dans un domaine D. Ce domaine D peut être limité par une ou plusieurs surfaces, mais on le suppose tel, que tout contour fermé qu'on y trace puisse se réduire à un point unique par une déformation continue sans sortir de D. (Dans le cas de deux variables, c'est la simplicité du contour de l'aire qui assurait cette condition).

On aura alors le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$ *soit la différentielle totale d'une fonction uniforme* $\mathrm{F}(x, y, z)$ *dans* D, *ou pour que l'intégrale curviligne*

$$\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$$

ne dépende que de ses limites dans D, *est que l'on ait, dans ce domaine,*

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}.$$

Dans ce cas, $\mathrm{F}(x, y, z)$ sera exprimée, à une constante près, par l'intégrale curviligne

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz,$$

effectuée sur un chemin arbitraire entre un point fixe et un point variable du domaine D.

Si l'on intègre sur un chemin polygonal dont les trois côtés soient respectivement parallèles à Ox, Oy et Oz, on retrouve les trois expressions du nº 98.

Si l'on intègre en ligne droite, on peut poser

$$\xi = x_0 + (x - x_0)t, \quad \eta = y_0 + (y - y_0)t, \quad \zeta = z_0 + (z - z_0)t$$

et l'intégrale $F(x, y, z)$ est donnée par une seule quadrature :

$$\int_0^1 [P(\xi, \eta, \zeta)(x - x_0) + Q(\xi, \eta, \zeta)(y - y_0) + R(\xi, \eta, \zeta)(z - z_0)]dt.$$

On vérifie directement, par un calcul analogue à celui de nº 105, que cette expression a pour dérivées partielles P, Q, R.

Exercices.

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de surface

$$(1) \qquad \iint_S A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

ne dépende que du contour L de la surface et non de la forme de celle-ci ?

R. Il faut que l'intégrale soit nulle sur toute surface fermée S. Soit V le volume compris dans S supposée fermée ; l'intégrale de surface revient par la formule de Green à l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Cette intégrale devant s'annuler quel que soit V, la condition cherchée est

$$(2) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

2. Montrer que si l'intégrale de surface (1) ne dépend que du contour L de S, elle se ramène à une intégrale curviligne sur L.

R. La condition (2) ayant lieu, il est possible de déterminer trois fonctions P, Q, R par les relations

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

On y satisfait, par exemple, en posant

$$P = \int_{z_0}^{z} B\,dz - \int C(x, y, z_0)\,dy, \quad Q = -\int_{z_0}^{z} A\,dz \;, \quad R = 0$$

L'intégrale de surface se transforme alors par la formule de Stokes (n° 34) dans l'intégrale curviligne

$$(3) \qquad \int_L \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz.$$

Ce résultat permet de généraliser la notion des différentielles exactes. On dit (Poincaré) que l'équation (**2**) exprime la condition pour que (**1**) soit une intégrale de différentielle exacte. Dans ce cas, en effet, l'intégrale *double* (**1**) se ramène à l'intégrale *simple* (**3**). Cette généralisation peut s'étendre à un nombre quelconque de variables.

CHAPITRE III.

Equations différentielles.

Généralités. Equations du premier ordre.

§ 1. Formation des équations différentielles.

109. Définitions. Ordre d'une équation. — On appelle *équation différentielle* une relation qui renferme à la fois les variables et leurs différentielles (ou leurs dérivées). Celles qui ne renferment qu'une seule variable indépendante et les dérivées des variables dépendantes s'appellent des *équations différentielles ordinaires*. Nous ne nous occuperons pour le moment que de celles-là.

Le cas le plus simple est celui où l'équation ne contient que la variable indépendante x, une fonction inconnue y et sa dérivée première y'. Cette équation est de la forme

$$f(x, y, y') = 0$$

et l'on dit qu'elle est *du premier ordre*.

En général *une équation différentielle de l'ordre n* contient la variable indépendante x, une fonction y et des dérivées de y jusqu'à l'ordre n inclus.

Les relations entre les seules variables qui résultent des équations différentielles sont les *intégrales* ou les *solutions* de ces équations.

La génération des équations différentielles peut se concevoir d'une manière qui permet de prévoir la nature de leurs intégrales.

110. Formation d'équations du premier ordre. — Soit une équation

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, C) = 0$$

entre deux variables x, y et une constante arbitraire C. En la dérivant, on aura

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Généralement cette équation renferme encore C ; mais, si l'on élimine C entre (1) et (2), on obtient une relation

(3) $$f(x, y, y') = 0,$$

qui a au moins la même généralité, mais a lieu entre x, y et y' seuls quel que soit C. C'est une équation différentielle. Elle exprime par exemple, une propriété géométrique commune à toutes les courbes représentées par l'équation (1), C restant quelconque.

L'équation (1) qui renferme une constante arbitraire, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation (3). On voit ainsi que l'intégration d'une équation du premier ordre a pour effet d'introduire une constante arbitraire. La généralité de ce résultat sera établie dans le paragraphe suivant.

111. Exemples. — 1° L'*équation des cercles concentriques* autour de l'origine est $x^2 + y^2 = C$. En la dérivant, on trouve la relation $x + yy' = 0$ qui exprime une propriété commune à tous les cercles.

2° Soit l'*équation des coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a+C} + \frac{y^2}{b+C} = 1.$$

On en tire

$$\frac{x}{a+C} + \frac{yy'}{b+C} = 0$$

et, en résolvant ce système par rapport à $1 : (a + C)$ et $1 : (b + C)$,

$$\frac{1}{a+C} = \frac{y'}{x^2y' - xy}, \qquad \frac{1}{b+C} = \frac{1}{y^2 - xyy'},$$

d'où l'équation différentielle de ces coniques

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a + b}{xy} y' - 1 = 0.$$

112. Formation d'équations du deuxième ordre. — Considérons maintenant une équation avec deux constantes arbitraires

(4) $$F(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Si l'on dérive une première fois, on obtient

(5) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Généralement il est impossible d'éliminer C_1 et C_2 entre (4) et (5), auquel cas il n'existe aucune relation sans constante arbitraire entre x, y et y'. On dit alors que les deux constantes sont *distinctes*, et pour

les éliminer, il faut dériver une fois de plus ce qui introduit y''. L'élimination des constantes conduira donc à une équation différentielle du second ordre.

Pour former cette équation, on peut aussi faire l'élimination de proche en proche. On élimine d'abord une des constantes, C_2 par exemple, entre (4) et (5), ce qui suppose que (5) renferme encore les deux constantes, sinon l'élimination serait toute faite. On a de la sorte une relation

$$(6) \qquad f_1(x, y, y', C_1) = 0,$$

qui renferme encore une constante arbitraire.

Maintenant on peut éliminer C_1 entre (6) et sa dérivée, ce qui fournit l'équation cherchée

$$(7) \qquad f_2(x, y, y', y'') = 0.$$

Celle-ci, qui ne renferme plus de constante arbitraire, a au moins la même généralité que les précédentes.

La relation (7) est la seule relation indépendante des constantes arbitraires (supposées distinctes) qui puisse exister entre x, y, y' et y'', car, s'il en existait une autre, en éliminant y'' entre elles deux, on trouverait une relation sans constante entre x, y et y', ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation (7) est une équation différentielle du second ordre; l'équation (6) est du premier ordre, mais contient une constante arbitraire : c'est une *intégrale première* de l'équation (7). Enfin l'équation (5) qui contient deux constantes arbitraires est son *intégrale générale.*

On prévoit d'après cela que l'intégration d'une équation du second ordre doit introduire deux constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

113. **Formation d'équations d'ordre quelconque.** — Ces résultats se généralisent aisément. Soit une équation avec n constantes

$$(8) \qquad F(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0.$$

Si on la dérive $n - 1$ fois de suite, on forme $(n - 1)$ équations nouvelles et l'on a en tout n équations entre les n constantes et x, y, y',... y^{n-1}. On dit que les constantes sont *distinctes* si l'élimination des n constantes entre ces n équations est impossible, ou s'il n'existe pas de relation sans constante arbitraire entre x, y, y',... y^{n-1}. Mais, si l'on

dérive une fois de plus, on a $(n+1)$ équations entre lesquelles on peut éliminer les n constantes, ce qui conduit à une relation entre $x, y, y', \ldots y^n$.

Pour former cette relation, on peut d'ailleurs faire l'élimination de proche en proche. En éliminant C_n entre $F = 0$ et sa dérivée, on trouve

$$f_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = 0.$$

De même, en éliminant C_{n-1} entre $f_1 = 0$ et sa dérivée,

$$f_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots C_{n-2}) = 0.$$

Après n opérations analogues, on obtiendra

$$f_n(x, y, y', \ldots y^n) = 0. \tag{9}$$

Cette relation est la seule qui puisse exister entre $x, y. y', \ldots y^n$ sans constante arbitraire, car, s'il y avait deux relations distinctes, on en déduirait une autre entre $x, y, \ldots y^{n-1}$ seulement et les constantes ne seraient pas distinctes.

L'équation (9) est une équation différentielle de l'ordre n. Les équations successives $f_{n-1} = 0, f_{n-2} = 0, \ldots f_1 = 0$, qui renferment chaque fois une dérivée de moins et une constante arbitraire de plus, sont des *intégrales premières, secondes,...* $(n-1)^{me}$ de l'équation (9). Enfin l'équation $F = 0$ qui a lieu entre x et y seuls et renferme n constantes arbitraires est son *intégrale générale.*

On conçoit donc que l'intégration d'une équation de l'ordre n aura généralement pour effet d'introduire n constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

114. Exemples. — 1° L'*équation générale des cercles*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

contient trois constantes arbitraires. Son équation différentielle sera donc du 3e ordre. Pour l'obtenir, dérivons d'abord deux fois de suite, il vient

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0.$$

Divisons par y'' et dérivons une dernière fois, on a

$$\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)' + y' = 0, \quad \text{d'où} \quad 3y'y''^2 = (1+y'^2)\,y'''.$$

2° L'*équation générale des coniques* étant

$$y = ax + b + \sqrt{px^2 + 2qx + r},$$

leur équation différentielle a été obtenue par Halphen comme il suit : En dérivant deux fois, il vient

$$y' = a + \frac{px+q}{\sqrt{px^2+2qx+r}}, \qquad y'' = \frac{pr-q^2}{(px^2+2qx+r)^{3/2}},$$

d'où

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2+2qx+r}{(pr-q^2)^{2/3}}, \qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Dans le cas de la parabole, $p=0$; l'équation se réduit au 4e ordre

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Si l'on effectue les dérivations indiquées et qu'on chasse les dénominateurs, on trouve, pour l'équation différentielle des coniques,

$$40 y'''^3 - 45 y'' y''' y^{\text{IV}} + 9 y''^2 y^{\text{V}} = 0,$$

et, pour celle des paraboles,

$$5 y'''^2 - 3 y'' y^{\text{IV}} = 0.$$

§ 2. Généralités sur les intégrales des équations différentielles.

115. Considérations préliminaires. — Soit une équation du 1er ordre

(1) $$y' = f(x, y).$$

Intégrer cette équation, c'est trouver toutes les fonctions y de x qui la vérifient. Au point de vue géométrique, c'est trouver toutes les courbes dont la tangente possède, en chaque point (x, y), la direction déterminée par l'équation (**1**).

La première question qui se pose est de savoir si le problème admet des solutions et combien il en admet. L'interprétation géométrique fait prévoir la réponse.

En effet, imaginons qu'une *courbe intégrale*, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation (**1**), soit décrite par un point mobile. Dans chacune de ses positions successives, ce point marche dans une direction imposée par l'équation (**1**). On conçoit aisément que son mouvement sera déterminé de proche en proche, mais le point de départ reste arbitraire. Il existera donc une infinité de courbes répondant à la question, chacune d'elles étant déterminée par un de ses points considéré comme *initial*. Par conséquent, il existera aussi une infinité

d'intégrales ou de fonctions y satisfaisant à l'équation (1). Une intégrale sera déterminée par sa valeur initiale y_0 pour $x = x_0$, mais cette valeur reste arbitraire.

Considérons maintenant deux équations simultanées entre deux fonctions y et z de x :

$$(2) \qquad y' = f_1(x, y, z), \qquad z' = f_2(x, y, z).$$

Au point de vue géométrique, intégrer le système c'est trouver toutes les courbes de l'espace dont la tangente possède, en chaque point (x, y, z) de la courbe, la direction définie par les équations (2). Un point qui décrit une *courbe intégrale* marche donc dans une direction qui est définie à chaque instant par la position actuelle de ce point, ce qui déterminera généralement le mouvement, sauf que la position initiale du point mobile reste arbitraire. On conçoit donc qu'il existe une infinité de courbes répondant à la question, chacune d'elles étant déterminée par un de ses points. Au point de vue analytique, il existe donc une infinité d'intégrales ou de couples de fonctions y, z satisfaisant aux équations (2) ; chaque intégrale est déterminée par ses valeurs *initiales* y_0 et z_0 pour $x = x_0$, valeurs qui restent arbitraires.

Si l'on considère plus de deux équations simultanées, la représentation géométrique fait défaut, mais les conclusions se généralisent d'elles-mêmes.

Les raisonnements précédents sont dépourvus de valeur démonstrative, mais ils font nettement saisir la nature du problème. Ils facilitent l'intelligence des démonstrations rigoureuses qui suivent et qui vont mettre en lumière les conditions sous lesquelles les conclusions précédentes sont exactes.

116. Existence de l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre. — Considérons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) ;$$

on aura le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si les fonctions f et f'_y sont continues et à détermination simple dans un domaine* D *et qu'on désigne par* (x_0, y_0) *un point de l'intérieur du domaine, l'équation admet, dans ce domaine, une intégrale* $y =$ F(x) *et une seule, ayant la valeur initiale* y_0 *pour* $x = x_0$.

Soient M le maximum de $|f|$ et M' celui de $|f'_y|$ dans D ; soient en-

suite a et b deux nombres positifs tels que le rectangle R défini par les inégalités $|x - x_0| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$ soit dans l'intérieur de D. Choisissons un nombre positif δ inférieur aux trois quantités a, $b : M$ et $1 : M'$. Faisons alors varier x dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$; on aura la suite de propositions suivantes, qui établissent le théorème :

I. *Si la fonction y est continue ainsi que y', si elle a pour valeur initiale y_0, si enfin elle vérifie l'équation différentielle sauf une erreur $< \varepsilon$, c'est-à-dire si l'on a*

$$(1) \qquad y' = f(x, y) + \omega, \qquad |\omega| < \varepsilon,$$

$|\omega|$ étant l'erreur en question, le point (x, y) ne sortira pas du rectangle R, *pourvu que ε soit assez petit.*

Intégrons (1) de x_0 à x, il vient

$$(2) \qquad y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \Big[f(x, y) + \omega \Big] dx.$$

Tant que (x, y) est dans R, $|f|$ est $<$ M ; on tire donc de (2)

$$|y - y_0| < \int_{x_0}^{x_0+\delta} \Big[M + \varepsilon \Big] dx = M\delta + \varepsilon\delta.$$

Comme $M\delta$ est $< b$, $M\delta + \varepsilon\delta$ l'est aussi, pourvu que ε soit assez petit. Alors $|y - y_0|$ est $< b$ et comme d'ailleurs $|x - x_0|$ est $\leqq \delta < a$, le point (x, y) ne peut atteindre le bord du rectangle R. Il ne peut donc *a fortiori* en sortir.

II. *Si deux fonctions y et* Y *ont la même valeur initiale y_0 et vérifient l'équation différentielle sauf une erreur $< \varepsilon$, leur différence $Y - y$ est une quantité aussi petite qu'on veut avec ε et le rapport $|Y - y| : \varepsilon$ reste inférieur au nombre fixe $2\delta : (1 - \delta M')$ si ε tend vers* 0.

Soient ω et ω' les erreurs relatives à y et Y. En soustrayant l'une de l'autre les deux équations analogues à (2), il vient

$$Y - y = \int_{x_0}^{x} [f(x, Y) - f(x, y) + \omega' - \omega]\, dx$$

Donc (η étant compris entre y et Y)

$$Y - y = \int_{x_0}^{x} [(Y - y) f'_y(x, \eta) + \omega' - \omega]\, dx.$$

Les points (x, y), (x, Y) et par suite (x, η) sont dans R, donc $f'_y(x, \eta)$ est $<$ M', et si l'on désigne par μ le maximum de $|Y - y|$ dans l'intervalle de x_0 à $x_0 + \delta$, on tire de l'équation précédente (δ étant $< 1 : M'$)

$$\mu < \int_{x_0}^{x_0+\delta} (\mu M' + 2\varepsilon)\, dx = \mu M'\delta + 2\varepsilon\delta, \qquad \text{d'où} \quad \frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\delta}{1-\delta M'}$$

III *On peut définir par des quadratures une fonction* $\varphi(x)$, *dépendant d'un paramètre positif* α, *continue ainsi que* $\varphi'(x)$, *ayant pour valeur initiale* y_0 *et qui vérifie l'équation différentielle sauf une erreur dont le rapport à* α *reste* $<$ MM′ *quand* α *tend* 0.

On pose $\varphi(x) = y_0$, si $x \leqq x_0$; et, si $x > x_0$, on pose

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x-\alpha)]\, dx,$$

ce qui définit d'abord $\varphi(x)$ par une quadrature dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \alpha)$, puis de proche en proche, par deux, trois,... quadratures, dans les intervalles $(x_0 + \alpha, x_0 + 2\alpha)$, $(x_0 + 2\alpha, x_0 + 3\alpha)$,... grâce à la connaissance de φ dans les intervalles précédents.

En dérivant cette formule, on obtient

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x-\alpha)]$$

Cette expression montre que $|\varphi'(x)|$ est $<$ M (car une démonstration pareille à celle de la proposition I montre que le point x, φ restera dans R) ; comme, d'autre part f'_y est $<$ M′, il vient, en appliquant deux fois le théorème des accroissement finis,

$$|f[x, \varphi(x)] - f[x, \varphi(x-\alpha)]| < M' \,|\varphi(x) - \varphi(x-\alpha)| < MM'\alpha.$$

Comparons cette inégalité à l'équation précédente ; on en conclut (C. Q. F. D) :

$$|\varphi'(x) - f(x, \varphi)| < MM'\alpha.$$

IV. *Si* α *tend vers* 0, $\varphi(x)$ *tend uniformément vers une intégrale* F(x) *de l'équation différentielle, ayant la valeur initiale* y_0.

En effet, $\varphi(x)$ vérifie cette équation sauf une erreur infiniment petite avec α. Donc les diverses fonctions φ se rapprochent indéfiniment les unes des autres (proposition II) et tendent uniformément vers une limite F. Revenons maintenant à la formule

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x-\alpha)]\, dx.$$

Quand α tend vers 0, $\varphi(x)$ et $\varphi(x-\alpha)$ tendent uniformément vers F(x), il vient donc, à la limite,

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, F)\, dx.$$

Cette formule montre immédiatement que $F(x)$ est une fonction continue ayant la valeur initiale y_0, ensuite (en la dérivant) que F est une intégrale.

V. *Si la fonction y vérifie l'équation différentielle sauf une erreur* $< \varepsilon$, *sa différence* $F - y$ *avec l'intégrale de même valeur initiale* y_0, *est aussi petite que l'on veut avec* ε *et le rapport* $|F - y| : \varepsilon$ *reste inférieur au nombre fixe* $2\delta : (1 - \delta M')$ *quand* ε *tend vers* 0.

Cette proposition, qui comporte évidemment que l'intégrale soit unique, est un cas particulier de II, car on peut considérer l'intégrale comme une fonction qui vérifie l'équation différentielle sauf une erreur nulle.

Nous avons raisonné dans tout ceci sur l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$, il est clair qu'on établirait les mêmes propositions pour l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$. Le théorème fondamental est donc démontré.

117. Théorème. — *L'intégrale est une fonction* $F(x, y_0)$ *de sa valeur initiale* y_0 *pour* $x = x_0$. *C'est une fonction continue de* y_0, *qui admet par rapport à* y_0 *une dérivée partielle, fonction continue de* x.

En effet, soit ΔF l'accroissement de F pour l'accroissement Δy_0 de y_0. On a, par une soustraction puisque F et $F + \Delta F$ sont des intégrales,

$$(\Delta F)' = f(x, F + \Delta F) - f(x, F) = \Delta F\, f'_y(x, F + \theta\Delta F)$$
$$(0 < \theta < 1)$$

Divisons par ΔF et intégrons de x_0 à x, il vient, puisque Δy_0 est la valeur initiale de ΔF,

$$\text{Log}\,\frac{\Delta F}{\Delta y_0} = \int_{x_0}^{x} f'_y(x, F + \theta\Delta F)\, dx.$$

Donc ΔF tend vers 0 avec Δy_0 et il vient, à la limite, ce qui prouve le théorème,

$$\text{Log}\,\frac{\partial F}{\partial y_0} = \int_{x_0}^{x} f'_y(x, F)\, dx.$$

118. Existence de l'intégrale d'un système du 1er ordre. — Considérons maintenant n fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$ d'une variable indépendante t. Soient $f_i(t, x_1, x_2, \dots x_n)$ ou, en abrégé, $f_i(t, x)$ n fonctions données de ces variables $(i = 1, 2, \dots n)$. Le système d'équations

$$x'_i = f_i(t, x) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

résolues par rapport aux dérivées, est un *système d'équations différentielles du premier ordre de la forme normale.*

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si les fonctions* f_i *et toutes leurs dérivées partielles premières par rapport aux* x *sont des fonctions continues et à détermination simple dans un domaine* D, *et qu'on désigne par* (t_0, x_{i0}) *un point intérieur au domaine, il existe, dans ce domaine, un système d'intégrales et un seul* $x_i = F_i(t)$, *ayant les valeurs initiales* x_{i0} *pour* $t = t_0$.

Ce théorème se démontre par une suite de propositions, qui généralisent celles du n° 116, et que nous nous contenterons d'énoncer quand la généralisation est immédiate.

Soient M le maximum de tous les $|f|$ et M' celui de tous les $|f'_x|$ dans D : ensuite a et b deux nombres positifs tels que le domaine R défini par les conditions :

$$|t - t_0| \leq a, \qquad |x_i - x_{i0}| \leq b \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

soit intérieur au domaine D.

Choisissons un nombre positif δ inférieur aux trois quantités a, $b : M$ et $1 : nM'$. Faisons alors varier t entre t_0 et $t_0 + \delta$, voici la suite des propositions qu'on obtient :

I. *Si le système des fonctions* x_i *de* t, *ayant les valeurs initiales* x_{i0}, *vérifie les équations différentielles sauf une erreur* $< \varepsilon$ *pour chaque équation, le point* (t, x) *ne sortira pas de* R, *pourvu que* ε *soit assez petit.*

II. *Si les deux systèmes de fonctions* x_i *et* X_i, *ayant les valeurs initiales* x_{i0}, *vérifient les équations différentielles sauf une erreur* $< \varepsilon$, *les différences* $X_i - x_i$ *sont aussi petites qu'on veut avec* ε, *et les rapports* $|X_i - x_i| : \varepsilon$ *restent inférieurs au nombre fixe* $2\delta : (1 - n\delta M')$ *si* ε *tend vers* 0.

Soient ω_i et ω'_i les erreurs relatives à x_i et X_i ; on a

$$X_i - x_i = \int_{t_0}^{t} \left[f_i(t, X_1, \dots) - f_i(t, x_1, \dots) + \omega'_i - \omega_i \right] dt$$

et, par la formule de Taylor (ξ_k étant compris entre x_k et X_k),

$$X_i - x_i = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \xi_1, \dots)}{\partial x_k} (X_i - x_i) + \omega'_i - \omega_i \right] dt.$$

Soit donc μ le maximum de toutes les différences $|X - x|$ dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \delta)$, on tire de l'équation précédente (δ étant, par hypothèse, $< 1 : nM'$)

$$\mu < \int_{t_0}^{t_0+\delta} (nM'\mu + 2\varepsilon)\, dt = \mu\, nM'\delta + 2\varepsilon\delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\,\delta}{1 - nM'\delta}$$

III. *On peut définir par des quadratures un système de fonctions $\varphi_i(t)$ dépendant d'un même paramètre positif α, ayant les valeurs initiales x_{i0} et qui vérifient les équations différentielles, sauf une erreur arbitrairement petite avec α et dont le rapport à α reste $< nMM'$ quand α tend vers* 0.

A cet effet, on pose $\varphi_i(t) = x_{i0}$ pour $t \leqslant t_0$; et, pour $t \geqslant t_0$,

$$\varphi_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} f_i[t, \varphi_1(t-\alpha), \varphi_2(t-\alpha), \dots]\, dt.$$

IV. *Si α tend vers* 0, *les fonctions $\varphi_i(t)$ tendent uniformément vers un système d'intégrales $F_i(t)$ ayant les valeurs initiales x_{i0}.*

V. *Tout système de fonctions x_i ayant les valeurs initiales x_{i0} et vérifiant les équations différentielles, sauf une erreur $< \varepsilon$ pour chaque équation, diffère aussi peu qu'on veut du système des intégrales F_i en supposant ε assez petit. Enfin, si ε tend vers* 0, *les quotients $|F_i - x_i| : \varepsilon$ restent $< 2\delta : (1 - nM'\delta)$.*

119. **Théorème.** — *Les intégrales F_i sont des fonctions continues de leurs valeurs initiales x_{i0} et elles admettent, par rapport aux x_{i0}, des dérivées partielles, fonctions continues de t.*

Si l'on considère le point initial comme variable autour d'une position particulière, la proposition V subsiste avec une même valeur de δ pour tous ces points, car, ayant choisi δ comme nous l'avons fait, les conditions qu'on lui a imposées subsistent pourvu que y_0 varie suffisamment peu. Le théorème résulte de là. En effet, soit $F_i + \Delta F_i$ le système des intégrales ayant pour valeurs initiales $x_{i0} + \Delta x_{i0}$ (les Δx_{i0} étant infiniment petits). Les différences

$$(F_i + \Delta F_i) - (F_i + \Delta x_{i0}) = \Delta F_i - \Delta x_{i0}$$

sont infiniment petites, car les fonctions $F_i + \Delta x_{i0}$, qui vérifient les équations différentielles à des infiniment petits près, sont infiniment voisines des intégrales $F_i + \Delta F_i$ qui ont les mêmes valeurs initiales. Donc les ΔF_i sont infiniment petits avec les Δx_{i0}.

Ce résultat se précise si tous les Δx_{i0} sont nuls sauf Δx_{10}. Dans ce cas, les fonctions $F_i + \Delta x_{i0}$ vérifient les équations sauf une erreur dont

le rapport à Δx_{10} reste fini ; les rapports $\Delta F_i : \Delta x_{10}$ restent donc finis aussi (Proposition V). Je dis qu'il en résulte que les dérivées partielles $(\partial F_i : \partial x_{10})$ existent et sont les intégrales u_i du système des n équations :

$$u'_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, F)}{\partial x_k} u_k, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

dont toutes les valeurs initiales pour t_0 sont nulles sauf une : $x_{10} = 1$.

On a, en effet, le système d'équations (Φ_k étant intermédiaire entre F_k et $F_k + \Delta F_k$) :

$$(\Delta F_i)' = f_i(t, F + \Delta F) - f_i(t, F) = \sum_k \frac{\partial f_i(t, \Phi)}{\partial x_k} \Delta F_k$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

et, en divisant par Δx_{10},

$$\left(\frac{\Delta F_i}{\Delta x_{10}}\right)' = \sum_k \left(\frac{\Delta F_k}{\Delta x_{10}}\right) \frac{\partial f_i(t, \Phi)}{\partial x_k}$$

Si Δx_{10} tend vers 0, les rapports $\Delta F : \Delta x_{10}$ restent finis et les Φ tendent vers les F. Donc les $\Delta F : \Delta x_{10}$ (qui ont les mêmes valeurs initiales que les u et qui vérifient, à des infiniment près, les mêmes équations différentielles) tendent vers les u, lesquels sont fonctions continues de t.

La démonstration est analogue pour les autres dérivées partielles.

120. Subdivision des intégrales en générales, particulières, singulières. — 1°) Soit d'abord *une seule équation du premier ordre*

$$y' = f(x, y),$$

où f est une fonction uniforme ou à détermination simple.

On a vu qu'on peut se donner arbitrairement la valeur y_0 de y pour $x = x_0$. La solution doit donc dépendre d'une constante arbitraire (qui peut être, en particulier, y_0). Une fonction y de x (ou une équation définissant y) qui satisfait à l'équation différentielle et qui dépend d'une constante arbitraire C, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle. Mais il faut pour cela que la constante C permette d'attribuer à y une valeur arbitraire y_0 pour $x = x_0$. Toute intégrale qu'on déduit de l'intégrale générale par une détermination spéciale de la constante est une *intégrale particulière*.

Dans tout domaine où se vérifient les conditions de continuité du théorème d'existence (n° 116), c'est-à-dire où f et f'_y sont continues, *l'intégrale générale donne la solution complète du problème de l'intégration*, car il ne peut passer qu'une seule intégrale par chaque point

(x_0, y_0) : celle-ci se confond donc nécessairement avec l'intégrale particulière passant par ce point.

Mais, dans un domaine où les conditions de continuité n'ont plus lieu, l'équation peut admettre exceptionnellement des intégrales ne rentrant pas dans l'intégrale générale, auxquelles on donne le nom d'*intégrales singulières*.

2°) Soit un système de *n équations différentielles simultanées* entre une variable indépendante t et n fonctions $x_1, x_2, \dots x_n$

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Comme on peut se donner arbitrairement les valeurs initiales des fonctions x pour $t = t_0$, la solution doit dépendre de n constantes arbitraires. On donne le nom d'*intégrale générale* à une solution (c'est-à-dire un système de n fonctions x ou de relations servant à les définir) qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, et l'on entend par ce mot que les constantes arbitraires permettent d'attribuer aux x des valeurs arbitraires pour $t = t_0$.

Les intégrales qui sont comprises dans l'intégrale générale par une détermination spéciale des constantes sont des *intégrales particulières*.

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les conditions de continuité du théorème fondamental sont vérifiées. Mais dans un domaine où ces conditions viennent à manquer, il peut exister exceptionnellement des *intégrales singulières* non comprises dans l'intégrale générale.

3°) Soit enfin *une équation de l'ordre n*

$$y^{(n)} = f(x. y, y', \dots y^{(n-1)}),$$

résolue par rapport à la plus haute dérivée. Elle se ramène à un système du premier ordre en désignant par $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ les $(n-1)$ premières dérivées de y, considérées comme autant d'inconnues.

Ce système sera

$$(i = 1, 2, \dots n-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = p_1 \\ p'_i = p_{i+1} \\ p'_{n-1} = f(x, y, p_1, p_2, \dots p_{n-1}) \end{array} \right.$$

On peut donc se donner arbitrairement y et ses $n-1$ premières dérivées pour $x = x_0$. L'*intégrale générale* est une solution qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, c'est-à-dire permettant de don-

ner à y et à ses $n-1$ premières dérivées des valeurs initiales arbitraires pour $x = x_0$. Le nombre des constantes est donc égal à l'ordre de l'équation. En leur donnant des valeurs spéciales, on obtient des *intégrales particulières.*

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les conditions de continuité ont lieu (donc dans tout domaine où f et ses dérivées par rapport à y, y',... y^{n-1} sont continues). Si ces conditions viennent à manquer, il pourra exister des *intégrales singulières* non comprises dans l'intégrale générale.

121. Remarques sur les solutions singulières. — Afin d'énoncer les résultats sous une forme plus précise, nous supposerons (ce qui est le cas ordinaire en analyse) que les fonctions considérées [1] ne cessent d'être continues qu'en devenant infinies et nous allons montrer d'abord que les équations différentielles n'admettent généralement pas de solution singulière et ensuite que, si elles en admettent, leur détermination peut généralement se faire sans intégration ou par des intégrations plus simples que celle des équations proposées. Nous examinerons successivement les trois cas du numéro précédent.

1° Considérons d'abord *une équation du premier ordre*

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

où f est une fonction à détermination simple. Elle ne peut admettre de solution singulière que si les conditions de continuité manquent ; donc que si f ou f'_y est infini pour tous les points de la solution. Ecartons le cas où f et par suite y' seraient infinis, ce qui ne donne aucune fonction y de x; toute solution singulière sera comprise dans la relation

$$(2) \qquad f'_y(x, y) = \infty.$$

Celle-ci définit généralement une ou plusieurs fonctions $y = \varphi(x)$, mais ce ne seront généralement pas des intégrales, car il faut pour cela que $y = \varphi(x)$ et $y' = \varphi'(x)$ vérifient identiquement l'équation (1), ce qui ne peut arriver que par exception.

En résumé, il n'y a généralement pas de solution singulière. S'il y en a, on les obtient sans intégration et elles ne renferment pas de constante arbitraire. Le fait de dépendre d'une constante arbitraire caractérise donc complètement l'intégrale générale, même dans un domaine où les conditions de continuité cessent d'avoir lieu.

[1] Il est clair que si les fonctions ne sont pas définies et réelles pour toutes les valeurs des variables, nous ne considérons que le domaine où cette condition a lieu.

2° Soit maintenant (S) un système de n équations

$$(S) \qquad x'_i = f_i\,(t, x_1, x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

où les fonctions f sont toujours supposées à détermination simple.

Si l'on écarte le cas où f_i est infini (auquel ne correspond pas de fonction x_i de t), on voit que toute solution singulière doit être comprise dans l'une des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \infty.$$

Celles qui ne contiennent pas de lettre x ne peuvent fournir de solution. Considérons-en une contenant par exemple x_n : on en tirera

$$(4) \qquad x_n = \varphi\,(t, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}).$$

Portant cette valeur dans le système (S), on obtient *un système* (S′) de $(n - 1)$ équations entre t et $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ [1] avec en plus *une équation de condition* fournie par la dernière équation de (S) :

$$(5) \qquad \psi\,(t, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = 0.$$

Si cette équation est identiquement vérifiée, l'intégration de (S′) fournit une intégrale singulière avec $(n - 1)$ constantes. Si cette équation est impossible pour t variable (ce qui a lieu si elle ne contient aucun x), l'équation (3) considérée ne fournit aucune solution. Mais, en général, cette équation (5) contiendra une lettre x, par exemple x_{n-1}, et on en tirera

$$(6) \qquad x_{n-1} = \varphi_1\,(t, x_1, x_2, \ldots x_{n-2}).$$

On opère sur (S′) avec (6) comme sur (S) avec (4). On sera ramené à un système de $(n - 2)$ équations et à une nouvelle équation de condition ne contenant plus x_{n-1}, et ainsi de suite.

En définitive, on aboutira généralement à une équation de condition impossible (ne contenant aucun x) et il n'y aura pas de solution comprise dans l'équation (3) considérée. Par exception, on tombera sur une équation de condition identique, alors il y aura une solution singulière dépendant de l'intégration d'un système à moins de n inconnues et renfermant moins de n constantes. La propriété de contenir n constantes distinctes caractérise donc complètement l'intégrale générale.

3° Ces conclusions s'appliquent d'elles-mêmes à l'*équation de l'ordre n*

$$y^{(n)} = f\,(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}),$$

où f est à détermination simple, car elle revient à un système du

[1] On suppose que la substitution (4) ne rend infinie aucune des fonctions f_i; sinon on verrait déjà qu'elle ne peut fournir d'intégrale. Même remarque pour les substitutions suivantes.

1er ordre. Cette équation ne peut admettre qu'exceptionnellement des solutions singulières. Dans ce cas, on les obtient sans intégration ou par l'intégration d'une équation d'ordre $< n$. L'intégrale générale demeure donc caractérisée par sa propriété de dépendre de n constantes, même dans un domaine où les conditions de continuité cessent d'avoir lieu.

Remarque. — La théorie des intégrales singulières est dans une étroite relation avec celle des courbes enveloppes. Nous y reviendrons à l'occasion de ce problème et nous l'étudierons alors d'une manière approfondie.

§ 3. Equations du 1er ordre et du 1er degré. Facteur intégrant.

122. On dit communément qu'*on sait intégrer* une équation quand son intégration se ramène à des quadratures. En ce sens, il n'y a qu'un petit nombre d'équations que l'on sache intégrer. Nous allons examiner les principales. Nous commencerons par celles qui sont du premier degré par rapport à la dérivée de la fonction inconnue. Nous supposerons que cette fonction soit y; mais il est clair qu'on pourrait aussi bien considérer x comme fonction inconnue de y et c'est ce que l'on doit souvent faire en pratique pour être ramené à l'un des types que nous allons examiner.

X**123**. **Equations qui sont différentielles exactes** (**ou immédiatement intégrables**). — Si l'équation est du premier degré en $dy : dx$, on peut la mettre sous la forme

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0$$

où P et Q sont des fonctions données de x, y. On dit que l'équation est *immédiatement intégrable* si son premier membre est une différentielle totale exacte. La condition nécessaire et suffisante pour cela, est que l'on ait $P'_y = Q'_x$ (no 96). Si elle a lieu, le premier membre est la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$; l'équation revient à $dF = 0$; son intégrale sera donc $F =$ const., ou, en développant (no 96),

$$\int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C.$$

C'est l'intégrale générale et il n'y a pas de solution singulière.

Exemples. Voici trois équations avec leurs intégrales en regard :

$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0,$	$x^3+3x^2y^2+y^4=C;$
$\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0,$	$\dfrac{y}{x}=\cot\left(C-\sqrt{1+x^2+y^2}\right);$
$\dfrac{dx}{\sqrt{y^2+x^2}}-\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\dfrac{dy}{y}=0,$	$y^2=C^2-2Cx.$

124. Séparation des variables. — L'équation (1) est immédiatement intégrable si les *variables sont séparées*, c'est-à-dire si P est une fonction X de x seul et Q une fonction Y de y seul, car on a, dans ce cas, $X'_y = Y'_x = 0$. L'équation prend alors la forme

$$\text{(2)} \qquad Xdx + Ydy = 0,$$

et elle a pour intégrale générale

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

Considérons maintenant les équations du type

$$\text{(3)} \qquad XYdx + X_1Y_1dy = 0,$$

où X, X_1 sont fonctions de x, Y et Y_1 fonctions de y seuls.

On dit qu'elles s'intègrent par *séparation des variables*. Il suffit, en effet, de les multiplier par le facteur $1 : X_1Y$ pour les ramener à la forme

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0.$$

et les variables sont séparées.

En intégrant cette équation, on obtiendra l'intégrale générale de (3). Toutefois il restera à vérifier si l'on n'a pas supprimé de solution annulant le facteur X_1 ou le facteur Y.

Les solutions des équations $X_1 = 0$ et $Y = 0$ sont des valeurs constantes $x = \alpha$ ou $y = \beta$. Ce sont aussi des solutions de l'équation (3) dont elles annulent les deux termes et elles peuvent être acceptables, car, au point de vue géométrique, elles correspondent à des droites parallèles aux axes,

Exemples. Voici trois équations avec leurs intégrales en regard :

$(1+x^2)y^3\,dx+(1-y^2)x^3\,dy=0,$	$x^{-2}+y^{-2}=2\,\mathrm{Log}\,(Cx:y)$
$(a^2+y^2)\,dx=2x\sqrt{ax-x^2}\,dy,$	$y-\sqrt{ax-x^2}=C\left(a^2+y\sqrt{ax-x^2}\right)$
$\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+\sec^2 y\,\mathrm{tg}\,x\,dy=0,$	$\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=C.$

125. Equations homogènes. — Si les fonctions P et Q de x, y sont homogènes et du même degré, l'équation

$$Pdx + Qdy = 0$$

est une *équation homogène*. Dans ce cas, le quotient P : Q ne dépend que du rapport $y : x$. L'équation, résolue par rapport, à y' se ramène donc au type

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Les variables deviennent séparables en changeant d'inconnue par la substitution

$$y = u\,x, \qquad \text{d'où} \qquad y' = u + xu'.$$

L'équation entre u et x sera, en effet,

$$xu' = \varphi(u) - u\,; \tag{5}$$

d'où, en divisant par $x\,[\varphi(u) - u]$ et en multipliant par dx,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}\,; \qquad \operatorname{Log} x = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C.$$

On obtiendra l'*intégrale générale* de (4) en remplaçant u par $y : x$ dans l'équation précédente.

On trouve aussi des solutions en annulant le facteur supprimé $\varphi(u) - u$, ce qui donne généralement pour u un certain nombre de valeurs constantes $u = u_1$, $u = u_2$,... Ces relations satisfont à l'équation (5) dont elles annulent les deux membres ; donc les relations

$$y = u_1\,x, \qquad y = u_2\,x, \ldots$$

sont des solutions de l'équation (4). Elles seront *singulières* à moins de rentrer dans l'intégrale générale.

On peut aussi intégrer les équations homogènes en les ramenant à des différentielles exactes. Nous le ferons dans le numéro suivant.

Exemples. Voici trois équations homogènes et leurs intégrales en regard :

$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$,	$x^2 = C^2 + 2\,Cy\,;$
$(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$,	$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{Log}\left(C\sqrt{x^2 + y^2}\right);$
$xy\,dy - y^2\,dx = (x + y)^2\,e^{-\frac{y}{x}}$,	$(x + y)\operatorname{Log} Cx = x\,e^{\frac{y}{x}}.$

126. Remarques sur les équations à la fois homogènes et différentielles exactes. — 1°) Quand l'équation $Pdx + Qdy = 0$ réunit ces deux

caractères, elle s'intègre immédiatement *sans aucune quadrature*, pourvu que son degré d'homogénéité n ne soit pas -1. Posons, en effet,

$$F(x, y) = Px + Qy.$$

On aura, eu égard à l'identité $P'_y = Q'_x$ et aux propriétés des fonctions homogènes [1],

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x} = P + \left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (n+1)P,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q + x\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q + \left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = (n+1)Q.$$

De là l'identité

$$(6) \qquad d(Px + Qy) = (n+1)(Pdx + Qdy)$$

Donc, $n + 1$ n'étant pas nul, l'intégrale générale de l'équation $Pdx + Qdy = 0$, sera

$$Px + Qy = C.$$

Exemples. Voici trois de ces équations et leurs intégrales en regard :

$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0,$	$x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = C;$
$(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0,$	$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C;$
$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0,$	$x + y\,e^{\frac{x}{y}} = C.$

2°) Supposons encore que $Pdx + Qdy$ soit une différentielle exacte. Si P et Q sont homogènes de degré -1, on a $n + 1 = 0$. Donc, $Px + Qy$ ayant une différentielle totale nulle en vertu de l'équation (6), on a *identiquement* (k étant une constante déterminée)

$$Px + Qy = k,$$

on ne connaît donc plus d'intégrale *a priori* et il faut recourir à la méthode générale d'intégration.

3°) Réciproquement, si P et Q étant homogènes et de degré -1, $Px + Qy$ se réduit identiquement à une constante k, $Pdx + Qdy$ sera une différentielle exacte. En effet, cette identité permet d'exprimer P au moyen de Q, et il vient

$$Pdx + Qdy = \frac{k - Qy}{x}\,dx + Qdy = k\frac{dx}{x} + (Qx)\,d\frac{y}{x}.$$

[1] Si $P(x, y)$ est homogène de degré n, on a (*t.* 1er nº 130) $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y} = nP$.

Or Qx étant de degré 0, est une fonction $\varphi(u)$ du rapport $u = y : x$; par conséquent, on a

$$Pdx + Qdy = k\frac{dx}{x} + \varphi(u)\, du,$$

ce qui est une différentielle exacte,

Si, en particulier, $k = 0$, l'équation se réduit à $\varphi(u)\ du = 0$; elle n'a donc d'autre intégrale que $u =$ const. ou $y = Cx$.

4°) Toute équation homogène $Pdx + Qdy = 0$ peut être rendue différentielle exacte. Il suffit, pour cela, de la diviser par $Px + Qy$. En effet, l'équation homogène de degré — 1

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0, \tag{7}$$

est immédiatement intégrable en vertu de la remarque précédente (le nombre k étant égal à 1). Mais le degré d'homogénéité de cette équation est — 1, ce qui est le cas d'exception de la remarque 1°). N'était donc ce cas, toutes les équations homogènes s'intégreraient sans quadrature.

Le facteur, inverse de $Px + Qy$, par lequel il faut multiplier l'équation pour la rendre immédiatement intégrable, s'appelle le *facteur intégrant* de l'équation. Nous y reviendrons dans un numéro suivant.

Toutefois, si $Px + Qy$ se réduit à 0, il y a une exception, cette expression ne peut plus être l'inverse d'un facteur intégrant. On rendra l'équation différentielle exacte en la divisant par Px ou par Qy, ce qui ramène son degré *à* — 1 et l'on retrouve le cas 3°) avec $k = 0$. L'intégrale générale sera $y = Cx$.

127. Equations réductibles aux équations homogènes. — Ce sont celles du type ($A,\ldots\ a,\ldots$ constants)

$$y' = \varphi\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right) \tag{8}$$

1°) Si $Ab - aB$ est différent de zéro, on change les deux variables en posant

$$\begin{aligned} \eta &= Ax + By + C, \\ \xi &= ax + by + c, \end{aligned} \qquad \text{d'où } \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Adx + Bdy}{adx + bdy} = \frac{A + By'}{a + by'}.$$

Dans notre hypothèse, le dernier rapport n'est pas indépendant de y' (ce qui arrive si $Ab - aB = 0$) de sorte que l'équation (8) revient à l'équation *homogène* entre η et ξ

$$(9) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A + B\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a + b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}$$

2°) Si $Ab - aB = 0$, on change d'inconnue seulement, par la relation

$$\eta = \frac{Ax + By}{A} = \frac{ax + by}{a}, \quad \text{d'où} \quad \eta' = 1 + \frac{b}{a}y'.$$

L'équation (8) ne se ramène plus à une équation homogène, mais à

$$(10) \qquad \eta' = 1 + \frac{b}{a}\varphi\left(\frac{A\eta + C}{a\eta + c}\right)$$

et les variables η et x se séparent.

On aura donc à intégrer (9) ou (10). On remplacera ξ et η, ou η seulement, par leurs valeurs et l'on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (8).

128. Equations linéaires. — Ce sont celles qui sont linéaires en y et y', donc du type

$$(11) \qquad y' + Xy = X_1,$$

X et X_1 désignant des fonctions de x seul. Le terme X_1 s'appelle le second membre ; s'il est nul, l'équation est *sans second membre.*

1°) L'*équation linéaire sans second membre* s'intègre par *une seule quadrature.* En effet, elle se réduit à

$$y' + Xy = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y'}{y} = -X.$$

Les variables sont séparées, l'intégrale sera

$$\text{Log}\, y = -\int X dx + \text{Log}\, C, \quad \text{d'où} \quad y = Ce^{-\int X dx}$$

2°) Pour intégrer l'*équation linéaire avec second membre,* désignons par u une intégrale particulière de l'équation sans second membre. Soit, par exemple,

$$u = e^{-\int X dx}$$

et changeons de fonction inconnue par la relation

$$y = uz, \quad \text{d'oú} \quad y' = uz' + u'z.$$

Comme $u' + Xu$ est nul par hypothèse, l'équation (11) se réduit à

$$uz' = X_1, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{X_1}{u}, \quad z = C + \int \frac{X_1}{u} dx$$

Remplaçons maintenant dans $y = uz$ les deux facteurs u et z par les valeurs trouvées. L'intégrale générale de (11) sera donnée par la formule (comportant deux quadratures)

$$(12) \qquad y = e^{-\int X dx} \left[C + \int X_1 \, dx \, e^{\int X dx} \right]$$

et il n'y a pas d'intégrale singulière.

Remarques. — 1°) Si l'on connaît une intégrale particulière y_1 de l'équation (11), son intégrale générale s'obtiendra par *une seule quadrature.* En effet, si l'on soustrait de l'équation (11) celle qu'on en déduit en remplaçant y par y_1, l'équation devient

$$(y - y_1)' = X (y - y_1)$$

C'est donc une équation linéaire sans second membre par rapport à $y - y_1$ et elle a pour intégrale

$$(13) \qquad y - y_1 = C e^{-\int X dx}$$

2°) Si l'on connaît deux intégrales particulières y_1 et y_2 de l'équation (11), l'intégrale générale s'obtient sans aucune quadrature : ce sera

$$(14) \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C.$$

En effet, puisque y_2 doit vérifier l'équation (13) pour une valeur convenable de C, le rapport de $y - y_1$ à $y_2 - y_1$ doit demeurer constant.

Exemples. — Voici quelques équations linéaires avec leurs intégrales en regard :

$y' + ay = e^{mx}$	$y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$
$y' - \frac{ny}{x+1} = e^{x}(x+1)^n$	$y = (x+1)^n(e^x + C)$
$y' + y\cos x = \sin x \cos x$	$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$
$y' + y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$	$y = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1$

129. Equations de Bernoulli. — En multipliant par y^n le second membre d'une équation linéaire, on obtient l'équation de Bernoulli

$$(15) \qquad y' + Xy = X_1 y^n.$$

Cette équation, divisée par y^n, se met sous la forme

$$\frac{y'}{y^n} + X\frac{1}{y^{n-1}} = X_1.$$

Prenons z pour inconnue, en posant

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n};$$

l'équation se ramène à l'*équation linéaire*

$$z' - (n-1)Xz = -(n-1)X_1.$$

La valeur de z ou de $1 : y^{n-1}$ sera donc

$$(16) \quad \frac{1}{y^{n-1}} = e^{(n-1)\int X dx}\left[C - (n-1)\int X_1 dx\, e^{-(n-1)\int X dx}\right]$$

Cette formule devient illusoire si $n = 1$, mais, dans ce cas, l'équation de Bernoulli se réduit à l'équation linéaire sans second membre $y' + (X - X_1)y = 0$.

Exemples. — Voici quelques équations de Bernoulli et leurs intégrales :

$(1 - x^2)y' - xy = axy^2$	$y^{-1} = C\sqrt{1-x^2} - a$
$y' + 2xy = 2ax^3y^3$	$2y^{-2} = a(1+2x^2) - Ce^{2x^2}$
$y^{n-1}(ay' + y) = x$	$ny^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$
$y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$	$3\sqrt{y} = C(1-x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)$
$xy^2(xy' + y) = a^2$	$2(xy)^3 = 3a^2x^2 + C.$

130. Equation qui s'intègre complètement au moyen d'une intégrale particulière. — Il s'agit du type général

$$y' + Xy^2 + X_1y + X_2 = 0,$$

où les lettres X désignent des fonctions de x seul. Cette équation peut s'intégrer quand on en connait une solution particulière y_1.

Posons, en effet,

$$y = y_1 + z;$$

l'équation devient

$$z' + (y_1' + Xy_1^2 + X_1y_1 + X_2) + Xz^2 + 2Xy_1z + X_1z = 0$$

et, y_1 étant une intégrale particulière, elle se réduit à

$$z' + z(2Xy_1 + X_1) = -Xz^2.$$

C'est une *équation de Bernoulli*, qu'on ramène à une équation linéaire en posant $z = 1 : u$. On serait donc ramené directement à une *équation linéaire* en posant tout de suite

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Remarques. On peut supposer que X soit différent de 0 dans l'équation précédente, sinon elle serait linéaire. Alors, par la substitution $y = z : X$, elle se ramène à la forme

$$z' + z^2 + \left(X_1 - \frac{X'}{X}\right)z + XX_2 = 0$$

ou, plus simplement, P et Q étant fonctions de x seul,

(17) $$z' + z^2 + Pz + Q = 0,$$

Par la substitution $z = u' : u$, celle-ci revient à l'équation du second ordre

(18) $$u'' + Pu' + Qu = 0.$$

Cette nouvelle équation, que nous étudierons en détail dans le chapitre suivant, est une *équation linéaire sans second membre.* Ses propriétés ont un caractère de simplicité qui donnera presque toujours l'avantage à la forme (**18**) sur la forme (**17**).

Il peut cependant y avoir exception dans certains cas particuliers ; nous en rencontrons des exemples dans les deux numéros suivants :

131. Cas d'intégrabilité d'une équation particulière du type précédent (Transformée de l'équation de Riccati). — Il s'agit de l'équation

(19) $$xy' - ay + by^2 = cx^n.$$

Elle s'intègre sous forme finie si le quotient $2a : n$ *est un nombre entier impair (positif ou négatif).*

Cette conclusion est immédiate si $n = 2a$. Dans ce cas, la substitution $y = ux^a$ ramène l'équation (**19**) à

$$x^{1-a}u' + bu^2 = c.$$

Les variables se séparent et l'on intègre par les fonctions logarithmiques ou circulaires.

Les autres cas, prévus dans le théorème, se ramènent à ce premier cas d'intégrabilité. Transformons, en effet, l'équation (**19**) par chacune des deux substitutions qui sont comprises dans la formule

(20) $$y = A + \frac{x^n}{z} \qquad \text{d'ou} \qquad y' = \frac{nx^{n-1}}{z} - \frac{x^n z'}{z^2},$$

quand on suppose : 1°) $A = b : a$ et 2°) $A = 0$.

1° Si $A = b : a$, l'équation transformée sera (après des réductions faciles)

$$xz' - (a + n) z + cz^2 = bx^n ;$$

2°) Si $A = 0$, l'équation transformée sera

$$xz' - (n - a) z + cz^2 = bx^n .$$

Les deux transformées ont donc conservé le type primitif (**19**), mais a est remplacé par $a + n$ dans la première, par $n - a$ dans la seconde. En outre, b et c sont intervertis. On peut recommencer sur ces nouvelles équations les deux substitutions comprises dans la formule (**20**) (en ayant égard aux nouvelles valeurs des coefficients) et répéter cette opération indéfiniment.

Supposons qu'on répète k fois la première substitution. On aura remplacé a par $a + kn$. On retrouvera le premier cas d'intégrabilité, si $n = 2(a + kn)$, donc si

$$\frac{n - 2a}{2n} = k \text{ (entier nul ou positif).}$$

Supposons ensuite qu'on fasse une fois la seconde substitution puis k fois de suite la première. On aura remplacé a par $(n - a) + kn$. On retrouvera le premier cas d'intégrabilité, si $n = 2(n - a) + 2kn$, donc si

$$\frac{n - 2a}{2n} = -k \text{ (entier négatif).}$$

En résumé, l'équation (**19**) s'intégrera sous forme finie, si $(n - 2a) : 2n$ est un entier positif, nul ou négatif; — ou, ce qui revient au même, si $2a : n$ est un entier impair, positif ou négatif.

Dans ce cas, l'intégrale calculée par la méthode précédente se présentera sous forme de fraction continue limitée.

132. Cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati. — L'équation de Riccati est la suivante.

$$(21) \qquad y' + ay^2 = bx^m .$$

On la ramène à celle du n° précédent par la substitution $y = u : x$; elle devient

$$xu' - u + au^2 = bx^{m+2} .$$

Le nombre $2a : n$ du n° précédent est ici $2 : (m + 2)$. De là le théorème suivant :

L'équation de Riccati s'intègre sous forme finie, chaque fois que $2 : (m + 2)$ *est un nombre impair (positif ou négatif), — ou, ce qui*

revient au même, chaque fois que $m:(m+2)$ *est un nombre pair (positif ou négatif).*

On procèdera d'ailleurs comme au n° précédent pour calculer cette intégrale.

Remarque. — Sauf dans les cas d'intégrabilité, il y a avantage à transformer l'équation de Riccati dans l'équation linéaire du second ordre (n° 130) par la substitution $y = \frac{u'}{au}$; elle devient ainsi

$$u'' - ab\,u\,x^m = 0. \tag{22}$$

C'est la transformée obtenue par *Euler*. Nous l'étudierons en détail dans le chapitre suivant.

133. **Théorie du facteur intégrant ou multiplicateur.** — Soit l'équation

$$Pdx + Qdy = 0. \tag{23}$$

On appelle *multiplicateur* ou *facteur intégrant* un facteur μ, généralement fonction de x et de y, tel que l'expression

$$\mu\,(Pdx + Qdy)$$

soit une différentielle totale exacte.

I. *Il existe toujours un facteur intégrant.*

En effet, l'équation (**23**) admet toujours une intégrale générale renfermant une constante arbitraire et qui, résolue par rapport à cette dernière, prend la forme

$$F\,(x, y) = C.$$

Connaissant cette intégrale générale, on peut en déduire un facteur intégrant μ. En effet, différentions totalement cette équation, puis éliminons dx et dy entre l'équation obtenue et l'équation (**23**) ; il vient successivement

$$F'_x dx + F'_y dy = 0, \qquad \frac{F'_x}{P} = \frac{F'_y}{Q}.$$

Cette dernière équation ne renferme plus C et doit être vérifiée en tout point x,y de l'intégrale générale, donc en un point quelconque, car on peut faire passer une intégrale particulière par ce point. C'est donc une *identité* : ses deux membres ne sont que deux expressions différentes d'une même fonction de x, y que nous désignerons maintenant par μ. Il vient donc *identiquement*

$$F'_x = \mu P. \quad F'_y = \mu Q, \qquad \text{d'où} \qquad \mu(Pdx + Qdy) = dF(x,y).$$

Donc μ est un facteur intégrant et l'on connaît une expression $F'_x : P$ de ce facteur.

II. *Si* $F(x,y) = C$ *et* $F_1(x,y) = C_1$ *sont deux formes différentes de l'intégrale générale de l'équation* (21), *on a*

$$F_1 = \varphi(F).$$

En effet soient μ et μ_1 les deux facteurs intégrants correspondants à F et à F_1. On a

$$\mu(Pdx + Qdy) = dF \qquad \mu_1(Pdx + Qdy) = dF_1$$

d'où

$$dF_1 = \frac{\mu_1}{\mu} dF.$$

Cette relation a lieu les variables x et y étant indépendantes. Elle subsiste si l'on change ces variables. Comme F contient au moins une des deux lettres x ou y, supposons que F contienne y. Prenons alors x et F comme variables indépendantes ; cette relation montre que l'on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial F} = \frac{\mu_1}{\mu}.$$

Donc F_1 ne dépend que de F et l'on a

$$F_1 = \varphi(F), \qquad \frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(F).$$

III. *Il existe une infinité de facteurs intégrants, et si* μ *est l'un d'eux, ils sont tous compris dans la formule générale* $\mu\psi(F)$, *la fonction* ψ *restant arbitraire.*

Tout facteur intégrant μ_1 est de cette forme en vertu de la dernière équation ci-dessus. Réciproquement, tout facteur de cette forme est intégrant, car on a

$$\mu\psi(F)(Pdx + Qdy) = \psi(F)dF = d.\int\psi(F)dF,$$

ce qui est une différentielle exacte.

IV. *La connaissance d'un facteur intégrant permet d'obtenir l'intégrale générale par des quadratures et de déterminer immédiatement la solution singulière s'il y en a une.*

En effet, l'équation différentielle peut s'écrire

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{\mu} dF = 0.$$

Elle se décompose en deux autres : $dF = 0$, ce qui fournit la solution générale, et $1 : \mu = 0$, ce qui fournira la solution singulière. La solution singulière jouit donc de la propriété remarquable de rendre infini le facteur intégrant,

V. *Si l'on connaît deux facteurs intégrants dont le rapport ne se réduise pas identiquement à une constante, on obtiendra l'intégrale générale en égalant ce rapport à une constante arbitraire.*

En effet, soient μ et $\mu\psi(F)$ deux de ces facteurs, en égalant leur rapport à une constante, il vient $\psi(F) = C$. Mais ψ contient F par hypothèse, donc cette relation revient à $F = C$: c'est donc l'intégrale générale.

VI. *En particulier, si l'on connaît un facteur intégrant d'une équation différentielle exacte, on obtiendra l'intégrale en égalant ce facteur à une constante.*

134.

134. Recherche d'un facteur intégrant. Cas de l'équation linéaire. — Parmi les équations étudiées précédemment, il y en a que nous avons intégrées par le procédé du facteur intégrant. Ce sont d'abord celles qui s'intègrent par séparation des variables (nº **124**), car cette séparation se fait en multipliant l'équation par un facteur intégrant facile à apercevoir. Ce sont ensuite les équations homogènes, que l'on rend immédiatement intégrables en les divisant par $Px + Qy$, ce qui est donc l'inverse d'un facteur intégrant.

En dehors de ces deux cas, la recherche d'un facteur intégrant est un procédé peu pratique d'intégration et c'est plutôt l'intégration de l'équation qui conduit à la connaissance d'un facteur intégrant par la méthode indiquée au nº précédent.

Cherchons les conditions analytiques auxquelles doit satisfaire un facteur intégrant. Pour simplifier, mettons l'équation sous la forme

$$dy + Pdx = 0. \tag{24}$$

La condition pour que $\mu\,(dy + Pdx)$ soit une différentielle exacte, est

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \tag{25}$$

C'est une équation aux dérivées partielles et l'intégration de cette équation doit être considérée comme un problème d'ordre plus élevé que celle de l'équation (**24**).

Comme application, cherchons à quelle condition le facteur μ sera fonction de x seul. L'équation (25) se réduit dans cette hypothèse à

$$(26) \qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Il faut donc que P'_y soit fonction de x seul, c'est-à-dire que P soit une fonction linéaire de y. Les seules équations de la forme $dy + Pdx = 0$ dont le facteur intégrant soit fonction de x seul, sont donc les équations linéaires. Pour celles-là, P est de la forme $Xy - X_1$ et P'_y est égal à X.

Soit donc l'équation linéaire

$$(27) \qquad dy + yXdx = X_1dx\,;$$

son facteur intégrant est donné par l'équation (26), qui devient

$$(28) \qquad \frac{\mu'}{\mu} = X, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = e^{\int Xdx}.$$

Multiplions donc l'équation (27) par un facteur intégrant μ et observons que $\mu dy = d(\mu y) - y d\mu$; il vient

$$d(\mu y) - y(\mu' - \mu X)dx = \mu X_1 dx.$$

Le terme en y disparaît par l'équation (28) ; il vient donc immédiatement

$$(29) \qquad y = \frac{1}{\mu}\int \mu X_1 dx.$$

C'est la formule d'intégration de l'équation linéaire (nº 128). Le facteur μ est l'inverse d'une solution de l'équation sans second membre.

135. Application. Formules d'addition des transcendantes. — Nous avons observé (nº 133) que si $F = C$ et $F_1 = C_1$ sont deux formes différentes de l'intégrale générale, on a $F_1 = \varphi(F)$. Voici des applications de cette remarque :

1º On a l'identité

$$d(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = (xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

Donc, les deux équations différentielles exactes

$$d(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = 0, \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

étant équivalentes, on connaît deux expressions de leur intégrale :

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\mathrm{C}, \qquad \text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \mathrm{C}_1.$$

Par conséquent,

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \varphi(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

On voit, en posant $y = 0$, que φ est un arc sinus ; il vient donc

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin }(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

2° On a pareillement l'identité

$$d\,\frac{x+y}{1-xy}=\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}\left(\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}\right),$$

d'où deux formes de l'intégrale générale d'une même équation différentielle :

$$\frac{x+y}{1-xy}=\mathrm{C}, \qquad \text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \mathrm{C}_1$$

Par conséquent,

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \varphi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

car on voit, en posant $y = 0$, que φ est un arc tangente.

Exercices.

1. En prenant $y - \mathrm{X}_1 : \mathrm{X}$ pour inconnue, montrer que l'intégrale de l'équation linéaire (n° 128) peut s'écrire

$$y=\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}}-e^{-\int \mathrm{X}dx}\left[\mathrm{C}+\int e^{\int \mathrm{X}dx}\, d\,\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}}\right].$$

2. Montrer que l'on peut intégrer l'équation

$$\mathrm{P}(xdy - ydx) = \mathrm{Q}dy - \mathrm{R}dx,$$

où P, Q, R sont homogènes en x, y et Q, R du même degré.

R. On pose $y = ux$ et l'on obtient une équation de Bernoulli pour déterminer x en fonction de u.

3. Intégrer l'équation de l'exercice précédent en supposant que P, Q, R soient linéaires en x, y, mais non plus nécessairement homogènes (Équation de *Jacobi*).

R. Si P, Q, R sont homogènes, c'est une application de l'exercice précédent. Si cette condition n'a pas lieu, on la réalise par le changement de variables

$$x = \xi + \alpha, \qquad y = \eta + \beta,$$

en déterminant les constantes α, β par les conditions

$$\frac{P(\alpha, \beta)}{1} = \frac{Q(\alpha, \beta)}{\alpha} = \frac{R(\alpha, \beta)}{\beta}.$$

En égalant chaque rapport à une même inconnue λ, on en tire trois équations linéaires entre α et β et l'élimination de α, β fournit une équation du 3me degré pour déterminer λ.

4. La condition nécessaire et suffisante pour que $1 : (Px + Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx + Qdy = 0$ est que $P:Q$ soit homogène de degré 0.

5. La condition nécessaire et suffisante pour que $1 : (Px - Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx + Qdy = 0$ est que $Px^2 : Q$ soit fonction du produit xy.

6. La condition nécessaire et suffisante pour que $Pdx + Qdy$ admette un multiplicateur homogène de degré n est que la fonction

$$\frac{x^2(P'_y - Q'_x) - nQx}{Px + Qy}$$

soit homogène et de degré 0.

§ 4. Équations du 1er ordre non résolues par rapport à y'.

136. Définition de l'intégrale générale. — Soit une équation

(1) $$f(x, y, y') = 0.$$

On pourra généralement tirer de cette équation plusieurs valeurs pour y', peut-être même une infinité,

(2) $$y' = f_1(x, y), \qquad y' = f_2(x, y), \ldots$$

Ces équations, qui sont de la forme traitée dans le paragraphe précédent, auront chacune leur intégrale générale, soit respectivement

(3) $$F_1(x, y, C) = 0, \qquad F_2(x, y, C) = 0, \ldots$$

Ce sont autant de solutions des équations (1) et l'on appelle *intégrale générale* de cette équation, une solution qui comprend toutes les précédentes.

Lorsqu'il n'y a qu'un nombre limité n d'équations (2) et, par suite, d'équations (3), on peut obtenir cette intégrale générale en multipliant entre elles toutes les relations (3), ce qui donne

(4) $$F_1(x, y, C)F_2(x, y, C) \ldots F_n(x, y, C) = 0.$$

Il arrive souvent que toutes les équations (3) peuvent être com-

prises en une seule renfermant des fonctions à déterminations multiples. Cette relation unique est alors l'intégrale générale. Si les fonctions à déterminations multiples sont des radicaux, on pourra généralement les faire disparaître par des élévations de puissance, mais il est clair que cela revient à former l'équation (4). Il est à remarquer que cette opération a déjà été faite pour plusieurs des équations proposées au paragraphe précédent. En voici un nouvel exemple : soit

$$y'^2 = 1 + y^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{\pm\sqrt{1+y^2}} = dx.$$

On en tire l'intégrale générale sous les deux formes

$$\text{Log}(y \pm \sqrt{1+y^2}) = \text{Log}\, Ce^x, \qquad 1 + y^2 = (Ce^x - y)^2.$$

Exemples. Les trois équations :

$$y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\, y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\, y' - x^3y^3 = 0$$

$$(a^2 - x^2)\, y'^3 + bx\,(a^2 - x^2)\, y'^2 - y' - bx = 0$$

$$\left[1 - \frac{y^2}{x^2}(x^2 + y^2)^2\right] y'^2 - \frac{2y}{x}\, y' + \frac{y}{x^2} = 0$$

reviennent aux suivantes, dont nous mettons l'intégrale en regard :

$(y' - x^2)(y' - xy)(y' - y^2) = 0$	$\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{c - x}\right) = 0$
$[(a^2 - x^2)\, y'^2 - 1]\,(y' + bx) = 0$	$(y + C)^3 = \frac{bx^2}{2}\left(\text{arc sin}\, \frac{x}{a}\right)^2$
$(xy' - y)^2 = [yy'\,(x^2 + y^2)]^2$	$y = x\, \text{tg}\left(C \pm \frac{y^2}{2}\right)$

137. Équations où manque une variable. — Elles sont de l'une des deux formes suivantes (la seconde se ramènerait d'ailleurs à la première en prenant x pour inconnue) :

$$f(x, y') = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(y, y') = 0.$$

On ramène immédiatement l'intégration à une quadrature en résolvant l'équation par rapport à y'. Mais il arrive que l'équation soit plus facile à résoudre par rapport à x (ou à y) que par rapport à y'. Dans ce cas, en faisant la résolution et en remplaçant y' par p, on obtient

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y - C = \int p dx = \int p\varphi'(p) dp \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \varphi(p) \\ x - C = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} \end{cases}$$

C'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale : x et y sont exprimés en fonction de p. En éliminant p entre les deux relations, on met l'intégrale sous la forme habituelle.

Exemples. I. Soit l'équation $x = p^3 + 1$;

$$y = \int p dx = 3\int p^3 dp = \frac{3}{4} p^4 + C.$$

En éliminant p, il vient $(x - 1)^2 = \left[\frac{4}{3}(y - C)\right]^3$.

II. Soit l'équation $x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$;

$$y - C = \int p dx = px - \int x dp = px - a\int \frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}} = pa - a\sqrt{1+p^2}.$$

En éliminant p, il vient $x^2 + (y - C)^2 = a^2$.

138. Équations homogènes. — Désignons encore y' par p et soit $f(x, y, p) = 0$ une équation homogène par rapport aux deux variables x, y. Si l'on peut la résoudre par rapport à p, elle se ramène à la forme étudiée au n° 125. Laissons ce cas de côté. En divisant par une puissance convenable de x et en posant $y = ux$, l'équation prend la forme $F(u, p) = 0$, et si on peut la résoudre par rapport à u, on aura

$$u = \varphi(p).$$

En dérivant la relation $y = ux$, on en tire

$$dy = pdx = udx + xdu,$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{\varphi'(p) dp}{p - \varphi(p)}.$$

L'équation différentielle entre x et p est à variables séparées et donne x en fonction de p par une quadrature. On obtient ensuite y en fonction de p par la relation $y = ux = x\varphi(p)$. On a donc une représentation paramétrique de l'intégrale.

Exemples. Voici trois équations avec, en regard, soit x exprimé en fonction de p, soit l'intégrale générale :

$y - px = nx\sqrt{1+p^2}$	$x = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}\left[\sqrt{1+p^2} - p\right]^{\frac{1}{n}}$
$y\sqrt{1+p^2} = n(x+py)$	$(x - C)^2 + y^2 = (nC)^2$
$y = yp^2 + 2px$	$y^2 = 2Cx + C^2$

139. Équations qui s'intègrent par dérivation. — Soit une équation résolue par rapport à y

$$(5) \qquad y = f(x, y').$$

En y remplaçant y' par p, elle devient

$$(6) \qquad y = f(x, p)$$

Si l'on dérive cette équation, on voit que p doit vérifier la condition

$$(7) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

C'est une équation du premier ordre entre p et x. Si on sait l'intégrer, on en tirera

$$(8) \qquad F(x, p, C) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad p = \varphi(x, C).$$

Portons cette valeur de p dans l'équation (6), il vient

$$y = f(x, \varphi).$$

Nous avons établi ainsi que toute intégrale rentre dans cette relation ; mais, réciproquement, cette relation est une intégrale, car, en la dérivant, on en tire, en vertu de l'équation (7), $y' = p = \varphi$. C'est donc l'intégrale générale. L'intégrale générale de (5) s'obtient donc en éliminant p entre (6) et (8) et, si l'on a soin de tenir compte de toutes les solutions de l'équation (8), on ne laissera échapper par cette méthode aucune intégrale de l'équation (5). On pourrait aussi résoudre l'équation (8) par rapport à x, puis porter la valeur trouvée dans (6) ; on aurait exprimé ainsi x et y en fonction de p et obtenu, par conséquent, une représentation paramétrique de l'intégrale.

Les équations traitées dans les deux nos suivants fournissent des exemples de cette méthode.

140. Équation linéaire en x et y. — Elle est de la forme (p désignant y')

$$(9) \qquad y = x\varphi(p) + \psi(p).$$

En la dérivant, on en tire

$$(10) \qquad p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right] \frac{dp}{dx}.$$

On peut vérifier cette équation en annulant $p - \varphi(p)$ et $\frac{dp}{dx}$; nous y reviendrons dans un instant. Supposons d'abord qu'aucune de ces quantités ne soit nulle ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Cette équation est linéaire en considérant x comme l'inconnue et p comme la variable indépendante. On sait l'intégrer et l'on trouve x en fonction de p et d'une constante arbitraire. En éliminant p entre cette relation et l'équation (**9**), on obtient l'intégrale générale. Si, au lieu de cela, on porte la valeur de x dans (**9**), x et y sont exprimés en fonction de p et l'on a une représentation paramétrique de l'intégrale.

Annulons maintenant $p - \varphi(p)$. On en tire généralement un certain nombre de valeurs constantes p_1, p_2,... qui satisfont à l'équation (**10**), car $\frac{dp}{dx}$ est alors nul aussi. En portant ces valeurs de p dans l'équation (**9**), on en tire un certain nombre de solutions singulières qui, géométriquement, représentent des droites.

Exemples. Les équations homogènes traitées au n° 138 peuvent aussi se résoudre par cette méthode. Voici d'autres exemples où les équations ne sont pas homogènes. Nous mettons l'équation à intégrer dans la première colonne, la valeur de x en fonction de p en regard.

$y = x(1+p) + p^2$	$x = Ce^{-p} - 2(p - 1)$
$y = 2px + \sqrt{1+p^2}$	$p^2x = C - \int \frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$
$y = 2px - p^2$	$p^2x = C + \frac{2}{3}p^3$

141. Équation de Clairaut. — La méthode du n° précédent échoue si $\varphi(p)$ se réduit à p. Dans ce cas, on obtient l'*équation de Clairaut*, qui a donc pour type

$$(11) \qquad y = px + \psi(p).$$

En la dérivant, il vient

$$p = p + \left[x + \psi'(p)\right] \frac{dp}{dx} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dp}{dx}\left[x + \psi'(p)\right] = 0.$$

Cette équation peut être satisfaite de deux manières :

1° En posant $\frac{dp}{dx} = 0$ d'où $p = C$.

Portant cette valeur dans (11), on obtient l'intégrale générale

$$y = Cx + \psi(C)$$

qui représente géométriquement un système de droites.

2° En posant $x + \psi'(p) = 0$.

Si on élimine p entre cette équation et (11), on obtient une solution sans constante arbitraire. C'est une intégrale singulière, car elle ne peut rentrer dans l'intégrale générale (p étant maintenant fonction de x). La solution singulière représente donc une courbe.

L'intégrale générale se compose de toutes les tangentes à la courbe représentée par la solution singulière.

En effet, toute solution particulière est donnée par l'équation $y = px + \psi(p)$ où p est constant. Cette droite passe par le point de la courbe qui a pour abscisse $x = -\psi'(p)$. Comme le coefficient angulaire y' de la courbe en ce point est égal à p par notre calcul lui-même, la droite touche donc la courbe en ce point.

Réciproquement, l'équation différentielle des tangentes à une courbe revient à une équation de Clairaut.

En effet, l'équation d'une droite étant $y = px + q$, pour exprimer qu'elle touche la courbe $\beta = f(\alpha)$, on écrira

$$f(\alpha) = p\alpha + q, \qquad p = f'(\alpha).$$

En éliminant α entre ces deux relations, on obtient une relation de la forme $q = \psi(p)$. L'équation générale des tangentes est donc

$$y = px + \psi(p)$$

et elle dépend d'une constante arbitraire p. Pour former l'équation différentielle des tangentes, il faut éliminer p entre cette équation et sa dérivée $y' = p$; on forme donc une équation de Clairaut.

Exemples. Voici quelques équations de Clairaut avec leurs intégrales singulières en regard :

$y = px + p - p^2$,	$4y = (x+1)^2$;
$y = px + \sqrt{a^2 - b^2p^2}$,	$by\sqrt{x^2 + b^2} = a(x^2 - b^2)$;
$y = px + \sqrt{1 + p^2}$	$x^2 + y^2 = 1$

EXERCICES.

1. Intégrer les équations

$$ayy'^2 + (2x - b)\, y' - y = 0$$

$$(4x^2 - a^2)\, y'^2 - 4xyy' + y^2 - a^2 = 0$$

$$(y - x)\sqrt{1+x^2}\, dy = n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

R. La première se ramène à une équation de Clairaut par la substitution $y^2 = u$ et la seconde à une équation linéaire en x, y en la résolvant par rapport à y.

Pour intégrer la troisième, on pose $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$, ce qui ramène à l'équation $\sin(v - u)\, dv = n dv$ et les variables se séparent en posant $v - u = z$.

2. L'équation de Clairaut est la seule qui s'intègre en remplaçant y' par C (Mansion).

3. *Transformation de Legendre.* Elle consiste à prendre comme nouvelles variables

$$X = y', \qquad Y = xy' - y.$$

En différentiant ces relations, on en tire, sans difficulté,

$$x = \frac{dY}{dX}, \qquad y = X\frac{dY}{dX} - Y, \qquad y' = X.$$

Par cette substitution, on ramène l'une à l'autre les deux équations

$$f(x, y, y') = 0 \qquad f\left(\frac{dY}{dx}, X\frac{dY}{dx} - Y, X\right) = 0$$

et l'intégrale de l'une fait connaître celle de l'autre.

Par exemple, l'équation $\Phi(xy' - y) = x\varphi(y')$ devient $\Phi(Y) = \dfrac{dY}{dX}\varphi(X)$ et les variables se séparent.

Cette substitution suppose toutefois que y'' ne soit pas nul. Si on l'applique à une équation de Clairaut, on ne trouve que la solution singulière.

§ 5. Applications géométriques des équations du 1er ordre.

142. Problème des trajectoires. — *Soit* $F(x, y, \alpha) = 0$ *une équation renfermant un paramètre arbitraire* α, *et qui représente, en axes rectangulaires, une famille de courbes planes* (F) ; *on demande de trouver*

les courbes qui rencontrent, sous un même angle donné ω, *toutes les courbes de cette famille.*

Soit (x, y) un point du plan. Considérons une courbe de la famille (F) et une trajectoire passant par ce point. Soient, en ce point, φ l'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à la courbe et $\varphi' = \varphi + \omega$ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire. On aura

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi' - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\omega}.$$

Ceci posé, formons l'équation différentielle des courbes de la famille (F), ce qui se fait en éliminant α entre $F = 0$ et sa dérivée. Cette équation sera de la forme

$$(2) \qquad f(x, y, y') = 0.$$

Dans cette équation, y' représente $\operatorname{tg}\varphi$. Si nous voulons en déduire l'équation différentielle des trajectoires, il faut former une équation dans laquelle y' représente $\operatorname{tg}\varphi'$. En vertu de la relation (1) entre $\operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{tg}\varphi'$, il faut, pour cela, remplacer, dans l'équation (2), y' par l'expression

$$(3) \qquad \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}.$$

D'où la règle : *L'équation différentielle des trajectoires s'obtient en formant l'équation différentielle des courbes* (F) *et en y remplaçant* y' *par* $(y' - \operatorname{tg}\omega) : (1 + y' \operatorname{tg}\omega)$.

Les trajectoires sont *orthogonales* ou *obliques* selon que l'angle ω est droit ou ne l'est pas. Dans le cas des trajectoires orthogonales, $\operatorname{tg}\omega$ est infini, l'expression (3) se réduit à $-1 : y'$. Donc *l'équation des trajectoires orthogonales s'obtient en remplaçant* y' *par* $-1 : y'$ *dans l'équation différentielle des courbes* (F).

Si l'angle ω est nul, la courbe cherchée touche toutes les courbes de la famille (F). On peut considérer le problème de trouver cette courbe comme un cas-limite de celui des trajectoires. L'expression (3) se réduit à y' et l'équation des trajectoires coïncide avec l'équation différentielle des courbes (F). La solution du problème ne peut donc être donnée que par une intégrale singulière de l'équation (2). Nous reviendrons sur cette question dans la théorie des courbes enveloppes.

143. **Exemple de trajectoires obliques.** — Cherchons les trajectoires des droites

$$y = \alpha x.$$

L'équation différentielle de ces droites est $xy' = y$. Donc celle des trajectoires sera, d'après la règle,

$$x(y' - \operatorname{tg}\omega) = y(1 + y'\operatorname{tg}\omega),$$

d'où

$$x\,dy - y\,dx = \operatorname{tg}\omega\,(x\,dx + y\,dy).$$

Cette équation homogène s'intègre immédiatement en la divisant par $x^2 + y^2$; il vient

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 + y^2) - \operatorname{Log} C\right]$$

ou, plus simplement, en coordonnées polaires r et θ,

$$r = Ce^{\theta\cot\omega}$$

Les trajectoires sont donc des *spirales logarithmiques*.

Remarque. — Si l'on considère un cône circulaire droit ayant le plan xy pour base, les trajectoires précédentes sont les projections sur ce plan d'une courbe du cône, qui coupe toutes les génératrices sous le même angle et qu'on appelle *hélice cylindroconique*. On voit donc que les projections d'une hélice cylindroconique sur le plan de base sont des spirales logarithmiques.

144. Exemples de trajectoires orthogonales. Systèmes orthogonaux. Une famille de courbes et ses trajectoires orthogonales forment ce qu'on appelle un *système orthogonal*. Nous allons en faire connaître quelques exemples simples :

I. Considérons les courbes paraboliques

$$y = \alpha x^a.$$

Leur équation différentielle est $xy' = ay$. Donc celle des trajectoires orthogonales sera

$$ayy' + x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad ay^2 + x^2 = C.$$

Les trajectoires sont des coniques ayant l'origine pour centre. En particulier, si $a = -1$, on a le *système orthogonal* :

$$xy = \alpha, \qquad\qquad x^2 - y^2 = C,$$

composé de deux familles d'hyperboles équilatères : les axes coordonnés sont les asymptotes des courbes de la première famille et les axes de symétrie des courbes de la seconde.

II. Considérons les *coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a+C}+\frac{y^2}{b+C}=1.$$

Leur équation différentielle est (nº 111)

$$y'^2+\frac{x^2-y^2+a-b}{xy}\,y'-1=0.$$

Cette équation se reproduit par le changement de y' en $-1:y'$. Donc le système des coniques homofocales contient ses propres trajectoires et forme à lui seul un système orthogonal. Par chaque point du plan passent effectivement deux courbes de la famille, une ellipse et une hyperbole, qui se coupent à angle droit.

III. *Développantes.* Les développantes d'une courbe plane sont les trajectoires orthogonales de leurs tangentes. Mettons l'équation différentielle des tangentes sous forme d'une équation de Clairaut (nº 141), savoir

$$y=xy'+\psi(y').$$

Désignons par p la dérivée de l'ordonnée y de la développante, l'équation différentielle des développantes s'obtient en remplaçant y' par $-1:p$ dans l'équation précédente : elle sera donc

$$y=-\frac{x}{p}+\psi\left(-\frac{1}{p}\right)$$

ou, plus simplement,

$$y=-\frac{x}{p}+\varphi(p). \tag{5}$$

C'est une équation linéaire en x et y (nº 140). Par la méthode générale de dérivation, on obtient, pour déterminer x, l'équation linéaire

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p(p^2+1)}=\frac{p\,\varphi'(p)}{p^2+1}.$$

Observons que l'on a

$$\int\frac{dp}{p(p^2+1)}=\int\frac{dp}{p}-\int\frac{p\,dp}{p^2+1}=\text{Log}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+1}};$$

il viendra, par la formule d'intégration de l'équation linéaire (nº 128),

$$x=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left(C+\int\frac{\varphi'(p)\,dp}{\sqrt{p^2+1}}\right). \tag{6}$$

Portons cette valeur de x dans (5) ; les équations (5) et (6) exprimeront x et y en fonction de p. Ce sera une représentation paramétrique des développantes et elle ne dépend plus que d'une quadrature. Nous avions déjà obtenu un résultat analogue dans le premier volume (n° 257).

145. Lignes de niveau et de plus grande pente d'une surface. — Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface rapportée à des axes rectangulaires. Nous supposerons l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan xy horizontal.

Les *lignes de niveau* de la surface sont les intersections de la surface par des plans horizontaux.

Les *lignes de plus grande pente* sont celles dont la tangente fait, en chaque point, le plus grand angle possible avec le plan horizontal. Cette tangente est donc perpendiculaire à la tangente horizontale (qui est celle de la ligne de niveau). Les lignes de plus grande pente sont donc les trajectoires orthogonales des lignes de niveau sur la surface.

Nous allons former les équations différentielles des projections de ces deux sortes de lignes sur le plan xy.

On obtient une ligne de niveau en coupant la surface par le plan $z = \alpha$. La projection de cette ligne sur le plan xy a pour équation

$$F(x, y, \alpha) = 0.$$

Pour former l'équation différentielle de ces projections, il faut dériver cette équation et éliminer α.

Passons aux lignes de plus grande pente. Ce sont les trajectoires orthogonales ~~des projections~~ des lignes de niveau sur la surface. Mais l'orthogonalité subsiste en projection sur le plan horizontal, parce que les lignes de niveau sont horizontales. Donc les projections des lignes de plus grande pente sur le plan xy sont les trajectoires orthogonales des projections des lignes de niveau ; leur équation différentielle s'obtient en remplaçant y' par $-1 : y'$ dans l'équation différentielle des projections des lignes de niveau.

Appliquons cette théorie aux surfaces à centre du second degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H.$$

En remplaçant z par α et en dérivant, on forme l'équation différentielle des projections des lignes de niveau

$$Ax + Byy' = 0.$$

Celle des projections des lignes de plus grande pente sera

$$Axy' - By = 0.$$

C'est une équation à variables séparées, ayant pour intégrale

$$y^{A} = \alpha x^{B},$$

Si l'on suppose $A = B$, la surface est de révolution, les projections des lignes de plus grande pente sont des droites et ces lignes elles-mêmes sont les méridiennes de la surface.

Exercices.

1. Les distances de l'origine aux points où la tangente coupe l'axe des y et où la normale coupe l'axe des x, sont dans un rapport constant a. Trouver la courbe.

R. L'équation différentielle est $y\,dx - x\,dy = a(x\,dx + x\,dy)$. La courbe est une spirale logarithmique (n° 143).

2. L'ordonnée à l'origine de la tangente est $kx^m y^n$. Trouver la courbe.

R. On obtient une équation de Bernoulli.

3. La projection sur le rayon vecteur de la normale terminée à l'axe des x, est une constante a. Trouver la courbe.

R. C'est une section conique $r = a : (1 - C\cos\theta)$.

4. Trajectoires orthogonales des paraboles $y^2 = 2p(x - \alpha)$.

R. Leur équation est $\operatorname{Log} y = -\dfrac{x}{p} + C$.

5. Trajectoires orthogonales des cissoïdes $y^2(2\alpha - x) = x^3$.

R. En coordonnées polaires, $r^2 = C(1 + \cos^2\theta)$.

6. Trajectoires orthogonales des cercles $x^2 + y^2 = \alpha x$.

R. Leur équation est $x^2 + y^2 = Cy$.

7. Trajectoires orthogonales des courbes $r^2 = a^2 \operatorname{Log}(\operatorname{tg}\theta : \alpha)$.

R. On trouve $2r^2(\sin^2\theta + C) = a^2$.

8. Le produit des segments compris sur deux axes rectangulaires entre l'origine et la tangente, est une constante k^2. Trouver la courbe.

R. Equation différentielle de Clairaut $y = px \pm k\sqrt{-p}$. Solution singulière $4xy = k^2$. C'est la courbe cherchée.

9. Courbes dont la tangente est à une distance constante a de l'origine.

R. Equation différentielle de Clairaut $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^2 + y^2 = a^2$.

10. La portion de tangente entre deux axes rectangulaires est une constante a. Trouver la courbe.

R. Equation de Clairaut $y = px + ap : \sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

11. Trouver une courbe telle que l'aire S comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques, soit proportionnelle à l'arc s compris entre les mêmes ordonnées.

R. La courbe est une chaînette ayant pour base l'axe des x.

12. Trouver la développante de la chaînette $y = (e^{mx} + e^{-mx}) : 2m$ en prenant comme origine de cette développante sur la courbe le point le plus bas. — Cette développante s'appelle *tractrice;* la tractrice est aussi : 1° la courbe dont la tangente est constante; 2° la trajectoire orthogonale d'une famille de cercles de même rayon, dont les centres sont en ligne droite.

13. Trouver la route suivie par un rayon lumineux qui traverse un milieu dans lequel l'indice de réfraction varie proportionnellement à la profondeur.

14. *Problème de Biot.* Trouver une courbe plane telle que tous les rayons lumineux émanés d'un point fixe A repassent par ce point après deux réflexions sur la courbe.

R. La courbe est un cercle passant par A.

CHAPITRE IV.

Equations différentielles (suite).

Equations d'ordre supérieur au 1er. Systèmes d'équations.

---

§ 1. Equations linéaires sans second membre. Wronskiens.

146. Notations. — Premières propriétés des équations linéaires sans second membre. — On appelle *équation linéaire homogène* ou *linéaire sans second membre* une équation linéaire et homogène par rapport à y et à ses dérivées successives.

Nous supposerons que le cœfficient de la plus haute dérivée ne s'annule pas. Comme on peut alors diviser toute l'équation par ce cœfficient, on peut admettre *a priori* qu'il soit égal à l'unité. L'équation d'ordre n prend alors la forme suivante

$$(1) \qquad y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = 0.$$

où les lettres X désignent des fonctions de x seul et les exposants des indices de dérivation.

Le premier membre de cette équation est un polynome symbolique de degré n en y. Nous poserons, en abrégé,

$$(2) \qquad f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y,$$

de sorte que l'équation (1) peut maintenant s'écrire

$$(3) \qquad f(y) = 0.$$

Si l'on désigne par u_1, u_2... des fonctions de x, par C_1, C_2,... des constantes, on reconnaît immédiatement, par les règles de dérivation, que le polynome symbolique $f(y)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation

$$(4) \qquad f(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots) = C_1 f(u_1) + C_2 f(u_2) + \dots$$

On en conclut le théorème suivant, qui conduit, comme nous le verrons (nos 148, 149, 150), à l'intégration de l'équation :

I. *Si u_1, u_2,... sont des intégrales particulières, en nombre quelconque, de l'équation linéaire sans second membre, la fonction $y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots$ sera une nouvelle intégrale, plus générale, de l'équation.*

Il est naturel de se demander si l'on ne pourrait pas, par une transformation, simplifier l'équation linéaire en annulant certains de ses coefficients. A ce point de vue, on peut énoncer le théorème suivant :

II. *On peut, par une quadrature, faire disparaître le terme en y^{n-1} de l'équation d'ordre n.*

Désignons, en effet, par u une fonction auxiliaire à déterminer et par z une nouvelle inconnue. Transformons l'équation (1) par la substitution $y = uz$, d'où l'on tire, par la règle de dérivation d'un produit,

$$y^n = uz^n + nu'z^{n-1} + \ldots, \qquad y^{n-1} = uz^{n-1} + \ldots, \qquad \ldots\ldots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1), le coefficient de z^n sera u, celui de z^{n-1} sera $(nu' + uX_1)$. Donc, si l'on détermine u par l'équation

$$nu' + uX_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u = e^{-\frac{1}{n}\int X_1 dx}$$

et qu'on divise l'équation (1) par u, l'équation transformée en z sera de la forme

$$z^n + Z_2 z^{n-2} + \ldots + Z_n z = 0,$$

les lettres Z désignant des fonctions de x.

Cette transformation, qui exige la détermination de u, dépend donc d'une quadrature.

147. **Définition et propriétés des wronskiens.** — L'étude des équations linéaires est intimement liée à celle de certains déterminants nommés *wronskiens*. Le *wronskien de u_1, u_2,... u_n* est, par définition, le déterminant suivant, formé avec les fonctions u et leurs dérivées :

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \ldots u_n \\ u'_1, & u'_2, & \ldots u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \ldots u_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nous le désignerons par

$$W \qquad \text{ou par} \qquad W(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Les wronskiens jouissent de certaines propriétés très simples :

1°) Le wronskien W s'annule si deux des fonctions u sont égales.

2°) Pour dériver un wronskien, on doit remplacer les éléments de la dernière ligne par leurs dérivées.

Cette règle est un cas particulier de la règle générale suivante : La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants successivement obtenus en remplaçant dans le proposé : d'abord tous les éléments de la première ligne, puis tous ceux de la seconde,... enfin tous ceux de la dernière ligne par leurs dérivées [1].

En effet, si l'on applique cette règle à un wronskien, tous les déterminants ainsi obtenus sont nuls comme ayant deux lignes égales, sauf le dernier.

148. Théorème I. — *Etant donnée une équation $f(y) = 0$, linéaire et sans second membre d'ordre n : 1° elle admet toujours n solutions particulières u_1, u_2,... u_n dont le wronskien ne s'annule pas ; 2° si u_1, u_2,... u_n sont n solutions satisfaisant à cette condition, l'intégrale générale sera*

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n. \tag{5}$$

Démontrons d'abord le premier point. Si u_1 est une solution particulière différente 0 de l'équation, son wronskien se réduit à u_1 et n'est pas nul. Supposons, par impossible, qu'on puisse trouver p $(0 < p < n)$ solutions particulières u_1, u_2,... u_p dont le wronskien soit différent de 0, mais qu'il soit impossible de leur ajouter une nouvelle solution satisfaisant à la même condition. Dans ce cas, toute intégrale de l'équation $f(y) = 0$ et, par conséquent, son intégrale générale vérifient la relation

$$W(u_1, u_2, \ldots u_p, y) = 0.$$

Cette relation est linéaire par rapport aux quantités y, y',... y^p, auxquelles on peut attribuer un système de valeurs arbitraires pour chaque valeur de x, car p est $< n$ et l'intégrale générale comprend au

(1) Cette règle se démontre aisément. S'il n'y a de variables que les éléments d'une seule ligne, on reconnait immédiatement, en développant le déterminant par rapport aux éléments de cette ligne, que sa dérivée s'obtient en remplaçant chaque terme de cette ligne par sa dérivée. La dérivée d'un déterminant quelconque sera donc, par la règle de dérivation des fonctions composées, la somme des déterminants successivement obtenus en supposant variables les éléments de la première ligne, puis ceux de la seconde,... ce qui conduit à la règle énoncée.

moins une intégrale particulière à laquelle on peut imposer ce systèmes de valeurs comme *initiales*. Donc la relation ne peut subsister que si les coefficients de y, y',.. sont nuls séparément, ce qui n'a pas lieu, car le coefficient de y^p est $W(u_1, u_2, \ldots u_p)$ qui est supposé différent de 0. Donc l'hypothèse est impossible, ce qui démontre la première partie du théorème.

Pour établir la seconde partie, considérons l'intégrale

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n \qquad (\text{ou} \quad y = \Sigma C u)$$

formée avec n intégrales particulières dont le wronskien W ne soit pas nul.

Pour établir que c'est l'intégrale générale, il faut prouver que les n constantes sont distinctes, ou permettent d'attribuer à y, y', ... y^{n-1} des valeurs arbitraires pour une valeur particulière de x. Il suffit, pour cela, que le système d'équations

$$y = \Sigma C u, \qquad y' = \Sigma C u', \qquad \ldots \qquad y^{n-1} = \Sigma C u^{n-1}$$

soit résoluble par rapport aux constantes C. Cette condition est effectivement remplie, car le déterminant du système est le wronskien W qui n'est pas nul.

149. Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $W(u_1, u_2, \ldots u_n)$ *soit différent de* 0, *est que les* n *fonctions* u *soient linéairement indépendantes.*

On dit que les fonctions u sont linéairement indépendantes si l'identité

$$(6) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_n u_n = 0 \qquad (\text{ou} \quad \Sigma \alpha u = 0)$$

ne peut avoir lieu pour des valeurs constantes des coefficients α que si tous ces coefficients sont nuls.

Si les fonctions u ne sont pas linéairement indépendantes, on forme par des dérivations successives le système de n équations

$$\Sigma \alpha u = 0, \qquad \Sigma \alpha u' = 0, \ldots \qquad \Sigma \alpha u^{n-1} = 0$$

et, ces relations étant satisfaites pour des valeurs non toutes nulles des α, on en tire $W(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'on ait identiquement

$$W(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0.$$

Je dis que les fonctions u ne sont pas linéairement indépendantes.

En effet, si u_1 était identiquement nul, on aurait $u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots = 0$ et les fonctions u ne seraient pas linéairement indépendantes. Supposons donc u_1 différent de 0 et joignons-lui successivement de nouvelles fonctions $u_2, u_3, \ldots$ jusqu'à ce que nous arrivions à un premier wronskien $W(u_1, u_2, \ldots u_p)$ qui s'annule ; u_p sera une intégrale de l'équation linéaire d'ordre $p-1$

$$(7) \qquad W(u_1, u_2, \ldots u_{p-1}, y) = 0.$$

Le coefficient de y^{p-1} est $W(u_1, u_2, \ldots u_{p-1})$, qui n'est pas nul, et l'équation (7) admet les solutions particulières $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$, satisfaisant aux conditions du théorème précédent ; on en conclut que son intégrale générale sera $y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_{p-1} u_{p-1}$. Donc l'intégrale particulière u_p est comprise dans la précédente en attribuant aux constantes C des valeurs convenables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, ce qui donne

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{p-1} u_{p-1}.$$

C'est une relation de la forme (6), dans laquelle un au moins des coefficients (celui de u_p) n'est pas nul.

De ce théorème et du précédent, on tire la conclusion suivante :

150. Intégration de l'équation linéaire sans second membre. — *L'intégration complète de l'équation linéaire sans second membre revient à la détermination de n intégrales particulières, linéairement indépendantes, $u_1, u_2, \ldots u_n$; l'intégrale générale est donnée par la formule*

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n,$$

et il n'y a pas de solution singulière.

151. Théorème III. — *Si les deux équations linéaires sans second membre :*

$$y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots X_n y = 0, \qquad y^n + \xi_1 y^{n-1} + \cdots + \xi_n y = 0,$$

ont la même intégrale générale, elles sont identiques terme pour terme.

En effet, leur différence

$$(X_1 - \xi_1) y^{n-1} + (X_2 - \xi_2) y^{n-2} + \cdots + (X_n - \xi_n) y = 0$$

est aussi vérifiée par cette intégrale générale, donc par des valeurs arbitraires de $y, y', \ldots y^{n-1}$, ce qui exige qu'on ait $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2, \ldots$

Le théorème précédent permet de montrer facilement que le premier membre de l'équation linéaire, ramené à la forme

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y,$$

s'exprime de différentes manières par des wronskiens, quand on con-

naît n intégrales, linéairement indépendantes, u_1, u_2,... u_n, ou l'intégrale générale de l'équation $f(y) = 0$. C'est ce que nous allons faire.

152. Première expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Formons l'équation linéaire d'ordre n

$$W(u_1, u_2, \ldots u_n, y) = 0 ;$$

elle revient à $f(y) = 0$, car elle a la même intégrale générale. Pour réduire son premier membre à $f(y)$, il suffit donc de le diviser par le coefficient de y^n ; d'où l'identité

$$(8) \qquad f(y) = \frac{W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)}{W(u_1, u_2, \ldots u_n)}$$

153. Formule de Liouville. Intégrale première de l'équation sans second membre. — Si l'on écrit $W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)$ sous forme de déterminant, on remarque que, d'après la règle pour former la dérivée d'un wronskien (n° 147), le mineur relatif à y^{n-1} est

$$-W'(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Identifions donc les coefficients de y^{n-1} dans les deux membres de la relation (8) ; il vient, W étant le wronskien de u_1, u_2,... u_n,

$$(9) \qquad \frac{W'}{W} = -X_1 \quad , \quad \text{d'où} \quad W = Ce^{-\int X_1 dx}$$

Cette formule est due à *Liouville*. On en déduit d'importantes conséquences :

1°) Si W n'est pas nul pour une valeur particulière de x comprise dans un intervalle où la fonction X_1 est continue, W ne peut s'annuler dans cet intervalle.

2°) Si l'on considère une équation dans laquelle le terme en y^{n-1} a disparu (n° 146), X_1 est nul et le wronskien W conserve une valeur constante.

3° On obtient immédiatement une intégrale première de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, si l'on en connaît $(n-1)$ solutions indépendantes u_1, u_2,... u_{n-1}. Remplaçons, en effet, y par l'intégrale générale $C_1u_1 + C_2u_2 + \cdots + C_nu_n$ dans le wronskien

$$W(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, y) ;$$

il vient, par la formule de Liouville,

$$(10) \qquad W(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, y) = C_n W = e^{-\int X_1 dx},$$

car la constante C_n peut être comprise dans l'intégrale indéfinie. C'est *une intégrale première de* $f(y) = 0$ et nous verrons (nº 160) que l'intégration s'achève par des quadratures.

154. Seconde expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Multiplicateurs. — Désignons, comme au nº précédent par W le wronskien $W(u_1, u_2, \dots u_n)$; par $W_i(y)$ le même wronskien dans lequel une des fonctions u seulement, la fonction u_i, a été remplacée par y. Formons l'équation linéaire d'ordre n (D désignant une dérivée)

$$\text{(11)} \qquad D.\frac{W_i(y)}{W} = 0,$$

cette équation admet les n intégrales particulières $u_1, u_2, \dots u_n$, car le rapport à dériver est égal à 1 si $y = u_i$, et à 0 si y est égal à une autre fonction u. Donc, pour réduire le premier membre de cette équation à $f(y)$, il suffit de le diviser par le coefficient de y^n.

Soient, en général, w_i^k le mineur de W relatif à l'élément u_i^k, w_i le mineur relatif à u_i ; on aura

$$W_i(y) = w_i^{n-1}y^{n-1} + w_i^{n-2}y^{n-2} + \cdots + w_i y.$$

Donc le coefficent de y^n dans l'équation (11) est $w_i^{n-1} : W$. On en conclut que l'on a, pour $i = 1, 2, \dots n$, l'identité

$$\text{(12)} \quad D.\frac{W_i(y)}{W} = D.\frac{w_i^{n-1}y^{n-1} + w_i^{n-2}y^{n-2} + \cdots w_i y}{W} = \frac{w_i^{n-1}}{W} f(y).$$

Il résulte de là que si l'on multiplie l'équation $f(y) = 0$ par l'une des n quantités $w_i^{n-1} : W$ $(i = 1, 2 \dots n)$, on transforme son premier membre dans une dérivée exacte. Ces facteurs sont des *multiplicateurs* de l'équation et nous ferons la théorie de ces multiplicateurs au paragraphe 3.

155. Division symbolique. — I. *Etant donnés deux polynomes symboliques d'ordres m et n* $(m \geqslant n)$

$$A(y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots, \qquad B(y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \cdots,$$

les lettres $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ *désignant des fonctions connues de x, il est toujours possible de déterminer deux nouveaux polynomes symboliques* Q *et* R *tels qu'on ait, quel que soit y,*

$$A(y) = Q\,[B(y)] + R(y)$$

Q *étant d'ordre $m - n$ et* R *d'ordre* $< n$.

Cette opération peut s'appeler la *division* de A par B ; Q est le *quotient*, R le *reste*. Si R est identiquement nul, on dira que A est *divisible* par B.

Pour établir ce théorème, mettons la seconde équation de l'énoncé sous la forme

$$y^n = \frac{1}{B_0}(B - B_1 y^{n-1} - B_2 y^{n-2} - \cdots).$$

Dérivons-la $m - n$ fois de suite et remplaçons chaque fois dans le second membre y^n, y^{n+1},... y^{m-1} par leurs valeurs déjà trouvées ; nous obtiendrons y^n, y^{n+1},... y^m en fonction linéaire de B, B',... B^{m-n} et de y, y',... y^{n-1}. Portons ces valeurs dans le premier polynome $A(y)$; il viendra

$$A(y) = Q(B) + R(y),$$

$Q(B)$ désignant un polynome symbolique en B, B',... B^{m-n} et R un polynome symbolique en y, y,... y^{n-1}. C'est la relation qu'il fallait établir.

II. *Sous les conditions énoncées, les polynomes* Q *et* R *ne peuvent être déterminés que d'une seule manière.*

En effet, soient Q_1 et R_1 deux autres polynomes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura, quel que soit y,

$$Q[B(y)] - Q_1[B(y)] = R_1(y) - R(y).$$

Il résulte de là que l'expression linéaire (d'ordre $n - 1$) $R_1(y) - R(y)$ est annulée par l'intégrale générale de l'équation (d'ordre n) $B(y) = 0$, donc par des valeurs arbitraires de y, y',.. y^{n-1}. Donc tous les coefficients de cette expression sont nuls et l'on a identiquement $R_1 = R$.

La relation se réduit alors à $Q[B(y)] = Q_1[B(y)]$. Celle-ci ayant lieu $B(y)$ restant arbitraire, on aura identiquement $Q = Q_1$.

Remarque. — Les calculs de la division symbolique pourraient aussi se faire, comme ceux de la division algébrique, en déterminant successivement chaque terme du quotient. Formons d'abord la différence

$$A(y) - \frac{A_0}{B_0} B^{m-n}(y) = C(y) = C_0 y^p + C_1 y^{p-1} + \cdots$$

Ce sera un polynome d'ordre $p < m$, car le terme en y^m disparait. Si $C(y)$ est d'ordre $< n$, la division est terminée et ce polynome est le reste. Dans le cas contraire, on formera une nouvelle différence d'ordre $q < p$

$$C(y) - \frac{C_0}{B_0} B^{p-n}(y) = D(y) = D_0 y^q + D_1 y^{q-1} + \cdots$$

et on continuera ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une différence $R(y)$ d'ordre $< n$. Ce sera le reste. Le quotient $Q(B)$ sera donné par la formule

$$Q(B) = \frac{A_0}{B_0} B^{m-n} + \frac{C_0}{B_0} B^{p-n} + \frac{D_0}{B_0} B^{q-n} + \ldots$$

156. Solutions communes à deux équations. — *Les solutions communes aux deux équations* $A(y) = 0$ *et* $B(y) = 0$ *d'ordres* m *et* n *respectivement* $(m \geqq n)$, *sont celles d'une équation linéaire et sans second membre d'ordre* $\leqq n$, *que l'on peut former par un calcul analogue à celui du plus grand commun diviseur de deux polynomes algébriques.*

En effet, divisons A par B et considérons l'identité

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y).$$

On en conclut que les équations $A = 0$ et $B = 0$ d'une part, les équations $B = 0$ et $R = 0$ d'autre part, ont les mêmes intégrales communes.

Si $A = 0$ admet toutes les intégrales de $B = 0$, il faut donc que R soit identiquement nul (ou A divisible par B), sinon R, qui est d'ordre $< n$, ne pourrait être annulé par l'intégrale générale de l'équation $B = 0$, qui est d'ordre n. Réciproquement, si R est identiquement nul, les solutions communes seront données par l'intégrale générale de $B = 0$.

Si R n'est pas identiquement nul, nous sommes ramenés à chercher les intégrales communes à B et à R. Nous divisons B par R, ce qui fournit un nouveau reste R_1 et ainsi de suite. Comme les ordres des restes vont en décroissant, l'opération ne peut se poursuivre indéfiniment; on arrivera donc à un premier reste R_n divisant exactement le précédent et, par suite, tous les autres. Ce reste R_n est le polynome symbolique de l'ordre le plus élevé qui divise à la fois A et B, il peut s'appeler *le plus grand commun diviseur* de A et de B. Les solutions communes aux deux équations $A = 0$ et $B = 0$ sont fournies par l'intégrale de $R_n = 0$.

Les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ ont toujours $y = 0$ comme intégrale commune, en d'autres termes, les deux polynomes A et B sont toujours divisibles par y. S'ils n'ont pas d'autre diviseur commun, on peut dire qu'ils sont *premiers entre eux*. Dans ce cas, les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ n'ont pas d'autre solution commune que $y = 0$.

§ 2. Équations linéaires avec second membre. Abaissement de l'ordre des équations linéaires.

157. Équations avec second membre. Forme de l'intégrale générale. — L'équation linéaire *non homogène* ou *avec second membre*, ou encore *complète*, contient un terme X indépendant de y et de ses dérivées. L'équation d'ordre n se ramène donc à la forme

(1) $$f(y) = X$$

où $f(y)$ désigne, comme précédemment, le polynome symbolique

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y$$

On a le théorème suivant :

L'intégrale générale de l'équation complète est la somme d'une intégrale particulière de cette équation et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Il n'y a pas de solution singulière.

En effet, soit y_1 une intégrale particulière de l'équation (1) ; on aura $f(y_1) = X$. Substituons à y une nouvelle inconnue z par la relation $y = y_1 + z$. L'équation (1) deviendra

$$f(y_1 + z) = f(y_1) + f(z) = X.$$

Elle se réduit à $f(z) = 0$. Donc z est l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Celle-ci n'ayant pas de solution singulière, l'équation (1) n'en a pas non plus.

Le théorème précédent fait connaître la forme de l'intégrale générale de l'équation complète. Il ramène la détermination de cette intégrale à l'intégration de l'équation sans second membre et à la recherche d'une intégrale particulière de l'équation complète. C'est une méthode d'intégration qui peut être utilisée dans des cas particuliers. Nous en verrons des exemples au paragraphe 4. Mais le théorème général pour l'intégration de l'équation avec second membre est le suivant :

158. Intégration de l'équation linéaire avec second membre. — *L'intégration de l'équation linéaire complète d'ordre n se ramène à celle de l'équation sans second membre et à n quadratures.*

Ce résultat s'obtient immédiatement en se reportant aux formules du numéro 154. Soit l'équation $f(y) = X$. Multiplions-la par le multiplicateur $w_i^{n-1} : W$. Il vient, par l'idendité (12) de ce numéro,

$$D \frac{w_i^{n-1}\, y^{n-1} + w_i^{n-2}\, y^{n-2} + \cdots + w_i y}{W} = \frac{w_i^{n-1}}{W} X,$$

et, en intégrant,

$$w_i^{n-1}\, y^{n-1} + w_i^{n-2}\, y^{n-2} + \cdots + w_i\, y = W \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X\, dx.$$

Multiplions respectivement par $u_1, u_2, \ldots u_n$ les n relations comprises dans la précédente pour $i = 1, 2, \ldots n$, et ajoutons membre à membre.

Le coefficient de y sera W, ceux de y', y''... seront nuls. Il viendra donc, en supprimant le facteur commun W qui n'est pas nul,

$$(2) \qquad y = \sum_{i=1}^{n} u_i \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X\,dx.$$

C'est la formule générale d'intégration de l'équation avec second membre. L'intégrale s'obtient, comme on le voit, par n quadratures, quand les fonctions u et, par suite, les fonctions W et w sont connues.

Remarque I. — Le théorème du n° précédent peut se déduire de cette formule, car, si l'on détache, dans chaque terme, la constante arbitraire C_i comprise dans l'intégrale indéfinie, l'ensemble des termes renfermant des constantes sera $\Sigma\, C_i u_i$, ce qui est l'intégrale de l'équation sans second membre. La formule se réduit aux termes restants en annulant les constantes C_i ; donc ces termes forment une intégrale particulière de l'équation complète.

Remarque II. — Si, au lieu de multiplier les équations par $u_1, u_2, .. u_n$ avant de les ajouter, on les avait multipliées par u_1^k, u_2^k,... u_n^k, on aurait obtenu, pour $k = 1, 2... n-1$,

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} u_i^k \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X\,dx.$$

159. Méthode de Lagrange (variation des constantes) et méthode de Cauchy. — On peut présenter sous différentes formes les calculs à faire pour obtenir l'intégrale générale de l'équation complète, connaissant celle de l'équation sans second membre. Il y a deux méthodes qui méritent particulièrement d'être signalées ici : ce sont celles de la variation des constantes arbitraires (Lagrange) et celle de Cauchy. Ce sont d'autres raisonnements qu'au n° précédent, mais en réalité les calculs sont les mêmes, à fort peu de chose près.

Nous désignerons dans ce n° par $\varphi(x)$, au lieu de X, le second membre de l'équation linéaire. Soit donc à intégrer l'équation complète d'ordre n

$$(3) \qquad f(y) = \varphi(x),$$

connaissant l'intégrale générale

$$(4) \qquad y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i$$

de l'équation sans second membre.

1° *Méthode de la variation des constantes.* — Soient y l'intégrale de l'équation (3) et $C_1, C_2... C_n$ des fonctions de x, définies par le système linéaire (de déterminant W différent de 0)

$$(5)\qquad y = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i, \qquad y' = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i', \ldots \qquad y^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^{n-1}$$

où les dérivées de y ont donc la même forme que si les C étaient constants.

Exprimons d'abord que y est l'intégrale de (3). Il faut dériver la dernière équation (5), ce qui donne

$$y^n = \Sigma\, C_i u_i^n + \Sigma\, u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx},$$

et porter ces valeurs de y, y', ... y^n dans (3). Il vient, $f(u_i)$ étant nul pour $i = 1, 2, \ldots n$,

$$(6)\qquad \sum_i u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx} = \varphi(x).$$

Donc l'intégrale cherchée y et les fonctions C_1, C_2,... C_n sont définies par les équations (5) et (6).

D'autre part, le système (5) peut être remplacé par la première, $y = \Sigma\, Cu$, de ces équations, jointe au système

$$(7)\qquad \sum_i u_i \frac{dC_i}{dx} = 0, \quad \sum_i u_i' \frac{dC_i}{dx} = 0, \quad \sum_i u_i^{n-2} \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

en vertu duquel les dérivées successives de y ont la forme (5).

Mais les équations (6) et (7) forment un système d'équations linéaires, résoluble par rapport aux dérivées des fonctions C. On en tire les valeurs de ces dérivées en fonction de x, ensuite les valeurs des fonctions C par n quadratures. L'intégrale générale cherchée s'obtient en portant ces valeurs dans $y = \Sigma\, Cu$.

2° *Méthode de Cauchy.* — Soit α un paramètre arbitraire ; déterminons les constantes C de l'intégrale générale (4) de $f(y) = 0$ par le système d'équations, linéaires par rapport aux lettres C,

$$y = 0, \quad y' = 0, \ldots \qquad y^{n-2} = 0, \qquad y^{n-1} = \varphi(\alpha),$$

d'où l'on tire les valeurs des constantes C en fonction de α. Portons ces valeurs dans $y = \Sigma\, Cu$; nous obtenons $y = \psi(x, \alpha)$. *Je dis que l'intégrale définie*

$$1 = \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha$$

est une solution particulière de $f(y) = \varphi(x)$.

En effet, on a, par hypothèse,

$$\psi(\alpha, \alpha) = 0, \ \psi_x'(\alpha, \alpha) = 0, \ldots \ \psi_x^{n-2}(\alpha, \alpha) = 0, \ \psi_x^{n-1}(\alpha, \alpha) = \varphi(\alpha).$$

Or α, étant quelconque, peut être remplacé par toute autre lettre. On a donc aussi

$$\psi(x, x) = 0, \quad \psi'_x(x, x) = 0, \ldots \qquad \psi_x^{n-2}(x, x) = 0, \quad \psi_x^{n-1}(x, x) = \varphi(x).$$

Différentions $(n-1)$ fois I en tenant compte de ces relations, il vient

$$I' = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\alpha, \ldots \quad I^{n-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial x^{n-1}} d\alpha, \quad I^n = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} d\alpha + \varphi(x).$$

Substituons ces valeurs dans $f(\mathrm{I})$ et observons, que $\psi(x, \alpha)$ étant une intégrale de $f(y) = 0$, on a $f(\psi) = 0$; il vient (C. Q. F. D)

$$f(\mathrm{I}) = \int_{x_0}^{x} f(\psi)\, d\alpha + \varphi(x) = \varphi(x).$$

L'intégrale générale de l'équation complète s'obtiendra en ajoutant I à l'intégrale de $f(y) = 0$. Elle sera donc

$$y = \Sigma\, \mathrm{C}u + \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

160. Cas général où l'équation sans second membre s'intègre par des quadratures [1]. — *Si l'on connaît n solutions indépendantes $u_1, u_2 \ldots u_n$ de l'équation linéaire sans second membre d'ordre $n+1$*

$$y^{n+1} + \mathrm{X}_1 y^n + \cdots + \mathrm{X}_{n+1}\, y = 0,$$

l'intégration s'achève par $n+1$ quadratures.

En effet, le théorème de Liouville fournit une intégrale première par une quadrature. Il vient, en changeant n en $n+1$ dans la formule du n° 153,

$$\mathrm{W}(u_1, u_2, \ldots u_n, y) = e^{-\int \mathrm{X}_1 dx}$$

C'est une équation d'ordre n avec second membre. Pour ramener le coefficient de y^n à l'unité, il faut diviser l'équation par $\mathrm{W}(u_1, u_2, \ldots u_n)$ que nous désignerons simplement par W. Cela fait, l'intégrale générale est fournie par la formule (2) du n° 158, qui devient (le sens des notations w_i^{n-1} n'étant pas changé)

$$(7) \qquad y = \sum_{i=1}^{n} u_i \int \frac{w_i^{n-1}\, dx}{\mathrm{W}^2}\, e^{-\int \mathrm{X}_1 dx}$$

ce qui comporte n nouvelles quadratures.

161. Application à l'équation du second ordre. — *L'équation linéaire et sans second membre du 2e ordre, s'intègre par deux quadratures quand on en connaît une solution particulière u_1.*

Soit l'équation

$$y'' + \mathrm{X}_1 y' + \mathrm{X}_2 y = 0.$$

[1] Remarquons que l'équation complète s'intègre toujours par quadratures en même temps que l'équation sans second membre (n° 158).

L'intégrale première de Liouville (nº 153) est

$$W(u_1, y) = u_1^2 D \frac{y}{u_1} = e^{-\int X_1 dx}$$

et il vient, par une nouvelle quadrature,

$$(8) \qquad y = u_1 \int \frac{dx}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx}$$

En particulier, si $X_1 = 0$, l'exponentielle se réduit à une constante C.

Par conséquent, si u_1 est une intégrale particulière de l'équation $y'' + Xy = 0$, l'intégrale générale sera

$$(9) \qquad y = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2}.$$

162. Méthode d'abaissement de d'Alembert. — I. *Si l'on connaît une intégrale particulière u_1, autre que 0, de l'équation d'ordre n linéaire et sans second membre $f(y) = 0$, l'intégration se ramène à celle d'une équation de même nature, mais d'ordre $n - 1$, et à une quadrature.*

En effet, changeons d'inconnue par la relation

$$y = u_1 z.$$

Les dérivées $y', y'', \ldots$ se calculent par la formule

$$y^p = z u_1^p + p z' u_1^{p-1} + \cdots + z^p u_1. \qquad (p = 1, 2, \ldots n)$$

Portons ces valeurs de $y, y', \ldots y^n$ dans $f(y) = 0$. Le coefficient de z^n sera u_1, celui de z sera $f(u_1)$ qui est nul, de sorte que le terme en z disparaîtra. Donc, si l'on désigne par les lettres Z des fonctions connues de x, l'équation en z sera

$$(10) \qquad u_1 z^n + Z_1 z^{n-1} + \ldots Z_{n-1} z' = 0.$$

Mais cette équation linéaire sans second membre se réduit à l'ordre $n - 1$ en prenant z' pour inconnue. Connaissant z', on obtient z par une quadrature, et l'intégrale cherchée sera $y = u_1 z$.

II. *Si l'on connaît p ($p < n$) solutions de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, on en déduit $p - 1$ solutions indépendantes (donc autres que 0) de l'équation en z' qui précède* (10).

En effet $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots \left(\frac{u_p}{u_1}\right)'$ sont des solutions de cette équation, entre lesquelles n'existe aucune relation à coefficients constants (non tous nuls) de la forme

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' + \alpha_3\left(\frac{u_3}{u_1}\right)' + \cdots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right)' = 0,$$

car, en intégrant et en désignant par α_1 une nouvelle constante, on en déduirait

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right) = -\alpha_1, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0.$$

et les solutions de $f(y) = 0$ ne seraient pas indépendantes.

Donc, en appliquant la proposition I à l'équation (**10**) en z', on peut abaisser son ordre d'une unité et l'on connaîtra, par la proposition II, $p - 2$ solutions indépendantes de l'équation d'ordre $n - 2$ ainsi obtenue. Celle-ci à son tour se ramènera à une équation d'ordre $n - 3$, dont on connaîtra $p - 3$ solutions indépendantes. On peut continuer ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une équation d'ordre $n - p$. D'où la proposition suivante :

III. *Si l'on connaît p $(p < n)$ solutions indépendantes de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$ et à des quadratures.*

Nous allons préciser ce théorème dans le n° suivant et, en même temps, en donner une autre démonstration, qui va plus au fond des choses.

163. Théorème général sur l'abaissement de l'ordre des équations linéaires. — *Si l'on connaît p $(p < n)$ solutions indépendantes de l'équation d'ordre n, linéaire sans second membre, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$ et à $p(n - p)$ quadratures distinctes.*

Soit $f(y) = 0$ cette équation d'ordre n ; désignons par $u_1, u_2, \ldots u_p$ les p intégrales connues et formons l'équation différentielle d'ordre p

$$\varphi(y) = 0$$

qui a pour intégrale générale $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_p u_p$. Le polynome symbolique $\varphi(y)$ ne diffère du wronskien

$$W(u_1, u_2, \ldots u_p, y)$$

que par un facteur, fonction de x, que l'on peut choisir à volonté. Puisque $f(y) = 0$ admet les intégrales de $\varphi(y) = 0$, le polynome f est divisible par φ (n° 156) et si l'on désigne par $Q(\varphi)$ un polynome de degré $n-p$, qui s'obtient par la division, on a l'identité

$$f(y) = Q[\varphi(y)]$$

L'équation $f(y) = 0$ se décompose donc en deux autres :

$$\varphi(y) = z, \qquad Q(z) = 0$$

La seconde est une équation linéaire sans second membre d'ordre $n-p$, qui détermine z avec $n-p$ constantes arbitraires. La première est une équation linéaire d'ordre p, avec second membre, mais on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre, cette équation détermine donc y par p quadratures, quand z est connu. Toutefois, comme z entre en facteur dans chacune des p fonctions à intégrer et que z est linéaire par rapport $n-p$ constantes arbitraires, chaque intégrale se décompose en $n-p$ autres multipliées par ces constantes et qui doivent, par conséquent, se déterminer séparément. Il y aura donc en tout $p(n-p)$ quadratures distinctes à effectuer.

Remarques. I. Si l'on connaît $n-1$ solutions indépendantes de l'équation sans second membre d'ordre n, l'ordre $n-p$ se réduit à 1 et l'intégration se fait par des quadratures, résultat connu (n° 160).

II. Si l'on connaît $p(p<n)$ solutions *indépendantes* de l'équation sans second membre d'ordre n, l'integration de l'équation complète se ramène à celle d'une équation sans second membre d'ordre $n-p$ et à $p(n-p)+n$ quadratures. En effet, il reste n quadratures à faire quand on a intégré l'équation sans second membre.

III. Les nombres de quadratures dont il s'agit dans ces théorèmes sont relatifs aux équations de la forme la plus générale. Si l'on considère des équations de forme spéciale, par exemple des équations où X_1 est nul, certaines de ces quadratures sont immédiates et leur nombre peut se réduire. Nous l'avons déjà observé pour l'équation du second ordre n° (161).

§ 3. Multiplicateurs des équations linéaires.

164. Multiplicateurs. — Considérons l'expression symbolique

$$(1) \qquad f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y = 0.$$

Un *multiplicateur de* $f(y)$ ou un *multiplicateur de l'équation* $f(y) = X$, est un facteur μ, fonction de x seul, tel que le produit $\mu f(y)$ soit la dérivée d'une fonction de x, y, y',... y^{n-1} et cela quel que soit y.

Il existe toujours des multiplicateurs et ce sont les intégrales d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n.

En effet, considérons l'intégrale indéfinie.

$$\int \mu f(y)\, dx = \int \mu\, (y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y) dx.$$

Transformons-la par intégration par parties, de manière à ne plus avoir de dérivée de y sous le signe $\int$. On a

$$\int \mu X_{n-1} y' dx = \mu X_{n-1} y - \int (\mu X_{n-1})' y \, dx.$$

$$\int \mu X_{n-2} y'' dx = \mu X_{n-2} y' - (\mu X_{n-2})' y + \int (\mu X_{n-2})'' y \, dx$$

. . . .

Par la substitution de ces valeurs, il vient, Ω désignant la somme des termes intégrés,

$$(2) \begin{cases} \int \mu f(y) \, dx = \Omega + \int y \left[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \cdots + (-1)^n \mu^n \right] dx. \\ \Omega = \mu y^{n-1} + [\mu X_1 - \mu'] y^{n-2} + \ldots \end{cases}$$

Donc, pour que μ soit un multiplicateur, il suffit que μ vérifie l'équation linéaire d'ordre n

$$(3) \qquad \mu^n - (\mu X_1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \mu X_n = 0.$$

Réciproquement, tout multiplicateur doit vérifier cette équation, sinon, comme on le voit en dérivant l'équation (2), l'expression $y [\mu X^n - (\mu X_{n-1})' + \cdots]$, qui est encore sous le signe $\int$ au second membre serait la dérivée d'une fonction de x, y, y',..., ce qui est impossible, car elle ne contient pas de dérivée de y.

165. Equation adjointe. — L'équation des multiplicateurs ou l'équation (3) s'appelle l'*équation adjointe* de $f(y) = 0$. Il existe une complète réciprocité entre ces deux équations. *L'équation $f(y) = 0$ est réciproquement l'adjointe de l'équation* (3), *c'est-à-dire l'équation de ses multiplica teurs*

En effet, si y est une intégrale de $f(y) = 0$, la relation (2) devient

$$\int y \left[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \cdots \right] dx = - \Omega,$$

où Ω est une fonction explicite de μ, μ',... Donc y est un multiplicateur de $\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \cdots$, ce qui prouve la proposition.

166. Théorème. — *Les intégrations complètes de deux équations adjointes sont deux problèmes complètement équivalents.*

En effet, supposons qu'on connaisse n solutions indépendantes u_1, u_2,... u_n de l'équation $f(y) = 0$; on obtient n multiplicateurs, donc n solutions de l'équation adjointe, par les formules (n° 154)

$$\mu_1 = \frac{w_1^{n-1}}{W}, \qquad \mu_2 = \frac{w_2^{n-1}}{W}, \ldots \qquad \mu_n = \frac{w_n^{n-1}}{W}.$$

Il reste seulement à montrer que ces multiplicateurs sont *linéairement indépendants.* Supposons, par impossible, que ces multiplicateurs ne soient pas indépendants ; on aura une identité de la forme $\Sigma\alpha_i w_i^{n-1} = 0$ où les α sont des constantes non toutes nulles. Ajoutons alors toutes les identités (12) du n° 154 respectivement multipliées par α_i ; il vient, quel que soit y,

$$\mathrm{D}\frac{y^{n-2}\Sigma\alpha_i w_i^{n-2} + \cdots + y\Sigma\alpha_i w_i}{\mathrm{W}} = 0,$$

ce qui ne peut subsister que si toutes les sommes Σ sont nulles. On aurait donc, pour des valeurs non toutes nulles des α, le système d'équations

$$\Sigma\alpha_i w_i = 0, \qquad \Sigma\alpha_i w_i' = 0,.., \qquad \Sigma\alpha_i w_i^{n-1} = 0,$$

ce qui est impossible, car le déterminant des quantités w, qui est l'adjoint de W et est égal à W^{n-1}, n'est pas nul (W ne l'étant pas).

167. **Théorème.** — *Si l'on connait p ($p<n$) multiplicateurs linéairement indépendants d'une équation linéaire d'ordre n, avec ou sans second membre, on peut abaisser l'ordre de l'équation de p unités sans que l'équation cesse d'être linéaire.*

Considérons une équation d'ordre n

$$(4) \qquad y^n + \mathrm{X}_1 y^{n-1} + \cdots + \mathrm{X}_n y = \mathrm{X}.$$

Multiplions-la par un multiplicateur μ_i et intégrons. Le premier membre s'intègre exactement et l'on obtient une intégrale première de cette équation, qui sera de la forme

$$(5) \qquad a_i y^{n-1} + b_i y^{n-2} + c_i y^{n-3} + \cdots = \int \mu_i \mathrm{X}\,dx.$$

Le premier membre de (5) n'est autre chose que l'expression Ω du n° 164. Les lettres a_i, b_i, c_i,... sont des fonctions connues de x, ayant pour valeurs, d'après la formule (2) de ce numéro,

$$a_i = \mu_i, \qquad b_i = \mu_i \mathrm{X}_1 - \mu_i', \qquad c_i = \mu_i \mathrm{X}_2 - (\mu_i \mathrm{X}_1)' + \mu_i'',\ldots$$

Si l'on connaît p multiplicateurs μ_1, μ_2,... μ_p, on obtient ainsi p intégrales premières, comprises dans l'équation (5) pour $i = 1, 2.., p$. Ces intégrales premières sont distinctes, c'est-à-dire qu'elles forment un système d'équations résoluble par rapport à y^{n-1}, y^{n-2},... y^{n-p}. En effet, le déterminant des coefficients de ces inconnues dans ce système d'équations est

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 \mathrm{X}_1 - \mu_1' & \ldots \\ \mu_2 & \mu_2 \mathrm{X}_1 - \mu_2' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1' & \mu_1'' & \ldots \\ \mu_2 & \mu_2' & \mu_2'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

C'est un wronskien qui ne s'annule pas, puisque $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ sont, par hypothèse, linéairement indépendants.

En résolvant le système par rapport à y^{n-p}, on obtient une équation linéaire d'ordre $n-p$ pour déterminer y. Le théorème est ainsi établi.

Remarque. — Le théorème précédent fournit une nouvelle démonstration de celui du n° 162 relativement à l'abaissement de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n, dont on connaît p intégrales linéairement indépendantes. Ces p intégrales sont des multiplicateurs de l'équation adjointe ; l'ordre de celle-ci peut donc s'abaisser de p unités. Ceci fait, l'intégration de l'adjointe et, par conséquent, l'intégration de l'équation proposée (n° 166) ne dépendent plus que de l'intégration d'une équation d'ordre $n-p$.

§ 4. Intégration des équations linéaires à coefficients constants.

168. Caractère algébrique du problème. — L'intégration des équations à coefficients constants avec et sans second membre dépend étroitement de deux problèmes d'algèbre : 1° La détermination des racines d'un polynome ; 2° la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples. Pour mettre cette dépendance en pleine lumière, il importe de définir et d'étudier les symboles d'opération avec le signe de dérivation D.

169. Opérations définies par des polynomes en D. Sommes et produits d'opérations — Soient $a_1, a_2, \ldots$ des coefficients constants, D le signe de dérivation par rapport à x. Posons

$$(1) \qquad f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots a_{n-1} D + a_n .$$

L'expression $f(D)$ est un symbole d'opération, dont le sens s'interprète immédiatement en convenant que si y désigne une fonction de x, on a

$$f(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_n y.$$

On remarquera que, dans le cas particulier où $f(D) = 1$, on a $f(D)y = y$. Donc, dans ce cas, $f(D)$ désigne une *opération d'effet nul.*

Les symboles opératoires à coefficients constants tels que (1), jouissent de propriétés qui les rapprochent des polynomes algébriques.

1° *Sommes d'opérations.* — En premier lieu, si $f(D)$ et $f_1(D)$ sont deux polynomes symboliques et qu'on représente par $f(D) + f_1(D)$ leur somme effectuée, on a, par les propriétés des dérivées,

$$f(D)y + f_1(D)y = [f(D) + f_1(D)]y.$$

Donc l'opération $f(D) + f_1(D)$ peut s'appeler la *somme des opérations* $f(D)$ et $f_1(D)$ et les sommes ainsi définies jouissent des propriétés des sommes algébriques. En particulier, l'opération $f(D)$ est la somme des opérations définies par chacun de ses termes.

2° *Produits d'opérations.* — Considérons d'abord un certain nombre de symboles linéaires $D + a$, $D + b$,... $D + l$. Nous pouvons définir l'opération

$$(2) \qquad (D + l) \dots (D + b)(D + a)$$

en convenant qu'on opère d'abord avec le facteur $(D + a)$, puis sur le résultat avec $(D + b)$ et ainsi de suite. Or, en effectuant ces opérations, on constate immédiatement qu'on obtient le même résultat que si l'on avait exécuté l'opération unique, définie par le produit algébrique $(D + l) \dots (D + a)$ préalablement effectué.

L'opération (2) peut donc s'appeler le *produit* des opérations définies par chaque facteur et ce produit est indépendant de l'ordre des facteurs. Si le produit se compose de m facteurs égaux $D + a$, on le représentera donc par $(D + a)^m$ comme en algèbre.

On définirait d'une manière analogue l'opération

$$f(D)\, f_1(D)\, f_2(D) \dots$$

composée de facteurs de degrés quelconques. On verrait que celle-ci aussi est indépendante de l'ordre des facteurs. Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que chaque polynome $f(D)$ peut, par les règles de l'algèbre, se décomposer en facteurs linéaires, ce qui ramène au cas précédent. Nous reviendrons sur cette décomposition dans le n° suivant.

170. Décomposition des polynomes en facteurs et des fractions rationnelles en fractions simples. Formules symboliques qui s'en déduisent. — 1° *Décomposition en facteurs.* Considérons l'équation algébrique de degré n (D étant considéré comme une quantité)

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Cette équation admet toujours n racines qui peuvent être égales ou distinctes, réelles ou imaginaires. Nous représenterons les racines différentes par r, s, t,... leurs ordres de multiplicité respectifs par λ, μ, ν,... Connaissant ces racines, on connaît aussi la décomposition de $f(D)$ en facteurs linéaires. On a

$$(3) \qquad f(D) = (D - r)^\lambda (D - s)^\mu (D - t)^\nu \dots$$

Considérons maintenant $f(D)$ comme un symbole d'opération et rappelons-nous les résultats du n° précédent. Nous voyons que l'opération $f(D)$ peut se décomposer en une suite d'opérations consécutives, définies par un seul des symboles $D - r$, $D - s$,... et effectuées dans un ordre arbitraire.

2° *Décomposition en fractions simples.* — La décomposition de $f(D)$ en facteurs se faisant par la formule (3), celle de $1 : f(D)$ en fractions simples se fera par la formule

$$(4) \qquad \frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D - r} + \frac{A_2}{(D-r)^2} + \dots + \frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1}{D-s} + \dots$$

où A_1, A_2,... B_1,... sont des constantes réelles ou imaginaires, que nous avons appris à calculer (Tome I, n°s 106 et 107).

Représentons par

$$\frac{f(D)}{(D-r)}, \ \frac{f(D)}{(D-r)^2}, \dots \frac{f(D)}{D-s}, \dots$$

les *polynomes* respectivement obtenus en supprimant dans $f(D)$ un facteur $(D - r)$, deux facteurs $(D - r)$,... un facteur $(D - s)$, etc., et mettons l'identité (4) sous la forme

$$(5) \quad 1 = A_1 \frac{f(D)}{D-r} + A_2 \frac{f(D)}{(D-r)^2} + \dots + A_\lambda \frac{f(D)}{(D-r)^\lambda} + B_1 \frac{f(D)}{D-s} + \dots$$

Dans cette nouvelle relation, chaque terme du second membre est un polynome et peut être considéré comme le symbole d'une opération à effectuer. La formule (5) montre que la *somme* des opérations définies respectivement par chaque terme du second membre, est une opération d'effet nul. Cette formule nous sera très utile.

171. Définition des équations linéaires à coefficients constants. Equation caractéristique. Equations simples. — L'équation linéaire à coefficients constants est du type

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a^{n-1} Dy + a_n y = \varphi(x)$$

Les coefficients a_1, a_2,... sont supposés constants ; la fonction $\varphi(x)$ est le second membre de l'équation.

Posons, comme précédemment,

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n ;$$

l'équation prendra la forme abrégée

$$f(D)y = \varphi(x).$$

Si $\varphi(x)$ est nul l'équation sera *sans second membre.*

L'intégration de cette équation dépend, comme nous le verrons (n° 176), de la résolution algébrique de l'équation

$$f(D) = 0,$$

que l'on appelle *l'équation caractéristique.*

Lorsque l'équation caractéristique est du premier degré ou encore a toutes ses racines égales, l'équation linéaire prend la forme

$$(D - r)^{\lambda} y = \varphi(x) \qquad (\lambda \geqslant 1)$$

L'intégration des équations de la forme générale se ramène à celle des équations de cette forme particulière, par une formule de réduction qui correspond à la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. C'est pourquoi nous dirons, par analogie, quoique ce soit un terme nouveau, que les équations de ce dernier type sont des *équations simples.*

172. Représentation symbolique des intégrales. — Etant donnée l'équation linéaire

$$f(D)y = \varphi(x),$$

nous conviendrons de représenter son intégrale générale par le symbole, obtenu en résolvant algébriquement l'équation,

$$y = \frac{\varphi(x)}{f(D)}.$$

En particulier, l'intégrale générale de l'équation sans second membre $f(D)y = 0$ se représentera par

$$y = \frac{0}{f(D)}$$

et celle de l'équation simple $(D - r)^{\lambda} y = \varphi$ par

$$y = \frac{\varphi}{(D - r)^{\lambda}} = (D - r)^{-\lambda} \varphi,$$

ce qui donne un sens au symbole $(D - r)$ avec un exposant négatif.

D'après cette définition, le signe $D^{-\lambda}$ est le *symbole de* λ *quadratures consécutives.* En effet, $D^{-\lambda}\varphi$ étant l'intégrale générale de $D^{\lambda} z = \varphi$, on aura

$$z = D^{-\lambda}\varphi = \frac{\varphi}{D^\lambda} = \int\int\ldots\int\varphi dx^\lambda$$

173. Formule symbolique fondamentale. — Soient r une constante et y une fonction de x ; on a

$$D.e^{-rx}y = e^{-rx}Dy - e^{-rx}ry = e^{-rx}(D - r)y.$$

Dans cette relation, remplaçons y par $(D - r)y$; il vient

$$D.e^{-rx}(D - r)y = e^{-rx}(D - r)^2y$$

et, en vertu de la relation précédente,

$$D^2.e^{-rx}y = e^{-rx}(D - r)^2y.$$

Remplaçons encore y par $(D - r)y$ et continuons ainsi de suite. Il viendra, après λ opérations,

$$D^\lambda.e^{-rx}y = e^{-rx}(D - r)^\lambda y \qquad (6)$$

C'est la formule que nous voulions établir.

La formule (6) n'est encore démontrée que si λ est positif. Nous allons montrer que, par les définitions du n° précédent, cette formule subsiste si λ est négatif.

En effet, éliminons y de cette formule, en posant

$$y = (D - r)^{-\lambda}\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad (D - r)^\lambda y = \varphi\ ;$$

nous obtenons

$$D^\lambda.e^{-rx}(D - r)^{-\lambda}\varphi = e^{-rx}\varphi,$$

ce qui, par définition de $D^{-\lambda}$, revient à

$$e^{-rx}(D - r)^{-\lambda}\varphi = D^{-\lambda}.e^{-rx}\varphi \qquad (7)$$

C'est précisément la formule (6) avec λ négatif.

Généralisation de la formule (6). — Désignons par $f(D)$ le polynome $D^n + a_1D^{n-1} + \ldots.$ on peut appliquer la transformation (6) à chaque terme $D^n.e^{-rx}y, \ldots$ de l'expression $f(D).e^{-rx}y$. On obtient ainsi

$$f(D).e^{-rx}y = e^{-rx}f(D - r)y$$

ou, en changeant $-r$ en a,

$$f(D).e^{ax}y = e^{ax}f(D + a)y. \qquad (8)$$

174. Intégration des équations simples. — *Equation sans second membre.* Considérons d'abord l'équation

$$(D - r)^\lambda y = 0 ; \tag{9}$$

en la multipliant par e^{-rx} (qui n'est ni nul ni infini) et en la transformant par la formule (6), elle devient

$$D^\lambda . e^{-rx} y = 0.$$

Donc $e^{-rx} y$ est un polynome arbitraire de degré $< \lambda$. Nous le désignerons par $P_{\lambda-1}$. Son développement contient λ constantes arbitraires :

$$P_{\lambda-1} = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (9) sera donc

$$y = \frac{0}{(D-r)^\lambda} = P_{\lambda-1} e^{rx} \tag{10}$$

Ce résultat pouvait aussi se tirer de la formule (7) en opérant comme nous allons le faire maintenant pour l'équation complète.

Equation avec second membre. Soit l'équation

$$(D-r)^\lambda y = \varphi(x), \qquad \text{d'où} \qquad y = (D-r)^{-\lambda} \varphi.$$

Tirons la valeur de $(D - r)^{-\lambda} \varphi$ de la formule (7) ; il vient

$$y = \frac{\varphi}{(D-r)^\lambda} = e^{rx} D^{-\lambda} e^{-rx} \varphi.$$

Cette formule ramène le calcul de y à λ quadratures ; elle peut s'écrire, d'après le sens attaché à $D^{-\lambda}$,

$$y = e^{rx} \int\int \ldots \int e^{-rx} \varphi(x) dx^\lambda . \tag{11}$$

Remarques. — I. Cette intégrale est la somme d'une intégrale particulière et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Pratiquement, pour calculer y, on effectuera les quadratures sans introduire de constantes, ce qui donnera une intégrale particulière et on lui ajoutera le produit de e^{rx} par un polynome arbitraire de degré $< \lambda$, ce qui est l'intégrale de l'équation sans second membre.

II. Si l'équation est du premier ordre, elle est de la forme

$$(D - r) y = \varphi(x),$$

on aura une intégrale particulière, en posant

$$y = e^{rx} \int_{x_0}^{x} e^{-rx} \varphi(x) dx,$$

mais il sera souvent plus avantageux d'écrire, au lieu de cela,

$$y = \int_{x_0}^{x} e^{r(x-t)} \varphi(t)\, dt. \tag{12}$$

III. La formule (11) ne doit pas être considérée comme la solution définitive du problème. Si λ est élevé, les quadratures successives donnent lieu à des calculs inutiles et on aura avantage à se servir des formules du n° suivant, dont la première (**13**) généralise la formule (**12**).

175. **Réduction de la formule d'intégration des équations simples.** — Soit encore l'équation

$$(\mathrm{D} - r)^{\lambda} y = \varphi(x).$$

On obtient une intégrale particulière u_λ de cette équation par la formule

$$u_\lambda = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)\,!} \varphi(t) e^{r(x-t)}\, dt \tag{13}$$

où x_0 est une constante qu'on peut choisir à volonté.

Cette formule subsiste pour $\lambda = 1$ et se réduit à la formule (**12**), en convenant de faire $0\,! = 1$. Démontrons-la.

Servons nous de l'identité (6) du n° 173, mise sous la forme

$$(\mathrm{D} - r) u = e^{rx} \mathrm{D}.ue^{-rx};$$

il viendra d'abord, si $\lambda = 1$,

$$(\mathrm{D} - r) u_1 = e^{rx} \mathrm{D}_x \int_{x_0}^{x} \varphi(t) e^{-rt} dt = \varphi(x).$$

Ensuite, si λ est > 1, la dérivée de l'intégrale par rapport à sa limite supérieure x est nulle et il suffit de dériver sous le signe $\int$; il vient

$$(\mathrm{D} - r) u_\lambda = e^{rx} \int_{x_0}^{x} \mathrm{D}_x \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)\,!} \varphi(t) e^{-rt} dt = u_{\lambda-1}$$

et ainsi, de proche en proche,

$$(\mathrm{D} - r)^{\lambda} u_\lambda = (\mathrm{D} - r)^{\lambda-1} u_{\lambda-1} = \ldots = (\mathrm{D} - r) u_1 = \varphi(x).$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Expression de l'intégrale générale. — Elle s'obtient en ajoutant à u_λ l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Elle sera donc (n° 174)

$$y = \mathrm{P}_{\lambda-1} e^{rx} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)\,!} \varphi(t) e^{r(x-t)} dt \tag{14}$$

C'est l'expression la plus commode de cette intégrale.

Remarque. — Cette formule peut se ramener à λ quadratures séparées. En effet, si l'on développe $P_{\lambda-1}$ et $(x-t)^{\lambda-1}$, on voit que le coefficient de $x^{\lambda-1-p}e^{rx}$ dans la formule est $(p < \lambda)$

$$\text{Const.} + \frac{(-1)^p}{(\lambda-1-p)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{-rt}t^p dt.$$

On peut comprendre la constante arbitraire dans le second terme en rendant l'intégrale indéfinie. Faisant cela pour les coefficients de chaque puissance de x, l'intégrale générale s'écrira

$$(15) \qquad y = e^{rx}\sum_{p=0}^{\lambda-1}(-1)^p \frac{x^{\lambda-1-p}}{(\lambda-1-p)!\,p!}\int \varphi(x)e^{-rx}x^p dx.$$

Cette formule ramène l'intégration à λ quadratures séparées, conformément aux théorèmes généraux. On arriverait au même résultat, mais moins simplement, par un nombre suffisant d'intégrations par parties sur l'expression (11). Cette formule (15) est ce que devient, tous calculs faits, la formule (2) du n° 158, quand on applique cette formule au cas de l'équation simple.

176. Intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et sans second membre. — Cette équation est de la forme

$$(16) \qquad f(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)y = 0.$$

L'intégration de cette équation revient à la résolution algébrique de l'équation caractéristique $f(D) = 0$.

En effet, connaissant les racines $r, s, \ldots, t$ de cette équation et leurs ordres de multiplicité $\lambda, \mu, \ldots \nu$, ou, ce qui revient au même, la décomposition de $f(D)$ en facteurs

$$(17) \qquad f(D) = (D-r)^\lambda (D-s)^\mu \ldots (D-t)^\nu,$$

on peut écrire immédiatement l'intégrale de l'équation (16). Ce sera, sauf une transformation indiquée au n° suivant s'il y a des racines imaginaires,

$$(18) \qquad y = P_{\lambda-1}e^{rx} + Q_{\mu-1}e^{sx} + \ldots + R_{\nu-1}e^{tx},$$

P, Q, ... R désignant des polynomes en x à coefficients arbitraires et de degrés marqués par leurs indices.

En d'autres termes, l'intégrale générale est la somme des intégrales de chacune des équations simples

$$(19) \quad (D-r)^{\lambda} y = 0, \quad (D-s)^{\mu} y = 0, \ldots \quad (D-t)^{\nu} y = 0.$$

Démonstration. — L'ordre des facteurs $(D-r)^{\lambda}$, $(D-s)^{\mu}$,... qui entrent dans $f(D)$ étant indifférent, l'équation $f(D)\,y = 0$ peut s'écrire en faisant figurer à volonté l'un quelconque de ces facteurs immédiatement devant y. Donc les intégrales des équations (**19**) sont des solutions particulières de l'équation (**16**) et l'expression (**18**), qui est leur somme, est une intégrale plus générale de cette équation. Mais, de plus, ce sera l'intégrale générale, car nous allons montrer que, réciproquement, toute intégrale de l'équation (**16**) est de la forme (**18**).

A cet effet, isolons successivement, dans $f(D)$, les divers facteurs $(D-r)$, $(D-r)^2$,... $(D-s)$,... L'équation $f(D) = 0$ s'écrira sous les formes

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{(D-r)} y\right] = 0, \quad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2} y\right] = 0, \ldots \quad (D-s)\left[\frac{f(D)}{D-s} y\right] = 0, \ldots$$

Chacune de ces équations devient une équation simple sans second membre en prenant la quantité entre crochets comme inconnue ; il vient, en les intégrant,

$$\frac{f(D)}{(D-r)} y = P_0 e^{rx}, \qquad \frac{f(D)}{(D-r)^2} y = P_1 e^{rx}, \ldots \qquad \frac{f(D)}{D-s} y = Q_0 e^{sx}, \ldots$$

les polynomes P étant de degrés $< \lambda$, les polynomes Q de degrés $< \mu$,... Multiplions respectivement ces équations par les constantes A_1, A_2,... B_1,... de la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples et ajoutons-les. Il vient, par l'identité (**5**) établie au nº 170,

$$y = e^{rx} \Sigma AP + e^{sx} \Sigma BQ + \ldots$$

Comme ΣAP, ΣBQ,... sont respectivement des polynomes de degré moindre que λ, moindre que μ,... cette expression est de la forme (**18**).

Remarque. — L'expression (**18**) renferme $\lambda + \mu + \ldots = n$ constantes arbitraires, qui sont les coefficients des polynomes P, Q,... On reconnaît ainsi, conformément aux théorèmes généraux, que l'intégrale générale de l'équation sans second membre est la somme de n intégrales particulières multipliées par des constantes arbitraires. Ces intégrales particulières sont donc linéairement indépendantes, si-

non elles ne fourniraient pas l'intégrale générale. On en conclut que *si r, s,... sont des constantes différentes (réelles ou non), l'identite*

$$P_{\lambda-1}e^{rx} + Q_{\mu-1}e^{sx} + \ldots = 0$$

ne peut avoir lieu que si les polynomes P, Q,... *sont identiquement nuls* [1].

177. Cas des racines imaginaires. — Quand les racines r, s,... ne sont pas toutes réelles, l'intégrale trouvée contient des imaginaires, mais elle subsiste, car les règles de dérivation des exponentielles ne sont pas changées. On peut, par une transformation, lui restituer la forme réelle.

Nous supposons ici que $f(D)$ est un polynome à coefficients réels, de sorte que ses racines imaginaires sont conjuguées deux à deux. Soit $r = \alpha + \beta i$ et $s = \alpha - \beta i$ une couple de racines conjuguées de l'ordre λ de multiplicité. Les termes correspondants de la formule (18) peuvent s'écrire, en désignant par P et Q deux polynomes arbitraires de degré $(\lambda-1)$,

$$Pe^{rx} + Qe^{sx} = e^{\alpha x}(Pe^{\beta ix} + Qe^{-\beta ix}).$$

Remplaçons $e^{\beta ix}$ par $\cos \beta x + i \sin \beta x$, $e^{-\beta ix}$ par $\cos \beta x - i \sin \beta x$; l'ensemble des termes considérés se met sous la forme

$$e^{\alpha x}[(P+Q)\cos \beta x + i(P-Q)\sin \beta x]$$

ou plus simplement,

$$(20) \qquad e^{\alpha x}[P_{\lambda-1}\cos \beta x + Q_{\lambda-1}\sin \beta x],$$

car on peut considérer $P + Q$ et $i(P - Q)$ comme deux polynomes réels [2] arbitraires $P_{\lambda-1}$ et $Q_{\lambda-1}$ de degré $\lambda - 1$.

(1) Il est facile de prouver directement ce théorème. Admettons, par impossible, que cette identité ait lieu pour les valeurs réelles de x, un coefficient au moins de chaque polynome n'étant pas nul. D'abord l'identité subsiste pour les valeurs imaginaires (car son premier membre est alors une somme de séries potentielles qui se détruisent). Soit r celle des quantités r, s,... qui a le plus grand module, ou l'une d'elles s'il y a plusieurs modules égaux. Remplaçons x par $x : r$ et faisons tendre x vers l'infini positif. Après cette substitution (qui n'altère pas nos hypothèses sur les polynomes P, Q,...), l'identité prend la forme

$$Pe^{x} + Qe^{\frac{s}{r}x} + \ldots = 0.$$

Mais les coefficients $\frac{s}{r}$,... diffèrent tous de 1 et ont tous des modules $\leqq 1$ par hypothèse, ce qui exige que *leurs parties réelles soient toutes* < 1. Donc, pour x infini positif, le premier terme Pe^{x} est d'ordre supérieur à tous les autres et l'identité est impossible.

(2) Il suffit, en effet, pour cela, que les deux polynomes P et Q soient conjugués.

Les termes de l'intégrale qui correspondent aux racines conjuguées r et s s'écriront donc sous la forme (20) et on opérera de même pour les autres couples de racines conjuguées s'il y en a.

En particulier, si les racines conjuguées r et s sont simples, les termes correspondants de l'intégrale générale seront

$$(21) \qquad e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$$

ou, ce qui revient au même,

$$Ce^{\alpha x} \cos (\beta x + C'),$$

C et C′ désignant deux nouvelles constantes liées aux premières par les relations $C_1 = C \cos C'$ et $C_2 = - C \sin C'$.

178. Exemples d'équations sans second membre. — I. Les deux équations

$$(D^2 + 5D + 6)y = 0, \qquad (D^2 - 2D + 1)y = 0,$$

ont pour caractéristiques

$$(D + 2)(D + 3) = 0, \qquad (D - 1)^2 = 0,$$

et pour intégrales

$$y = Ce^{-2x} + C_1e^{-3x}, \qquad y = (C + C_1x)e^x.$$

II. Soit l'équation

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0.$$

L'équation caractéristique $(D^2 + 4)^2 = 0$ a des racines doubles imaginaires $\pm 2i$; l'intégrale générale sera

$$y = (C + C_1x) \cos 2x + (C_2 + C_3x) \sin 2x$$

III. Soit l'équation

$$(D^4 + 4a^4)y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$D^4 + 4a^4 = (D^2 + 2a^2)^2 - (2aD)^2 = 0$$

a les racines $\pm a(1 \pm i)$; l'intégrale générale sera

$$y = Ce^{ax} \cos (ax + C') + C_1e^{-ax} \cos (ax + C'_1).$$

179. Intégration par quadratures de l'équation complète à coefficients constants. — Connaissant l'intégrale de l'équation sans second membre, celle de l'équation complète s'obtient par deux méthodes principales :

1°) Par des quadratures ;

2°) Par détermination directe d'une intégrale particulière.

Occupons-nous d'abord de la première méthode. Elle résulte des théorèmes généraux sur les équations linéaires et la formule (2) du n° 158 est applicable au cas actuel, mais cette formule est incommode pour une raison que nous indiquerons au début du n° suivant. Il convient donc de traiter le problème directement.

Soit l'équation avec second membre

$$(22) \qquad f(D)y = (D-r)^{\lambda}(D-s)^{\mu}\cdots y = \varphi(x)$$

et soit connue la décomposition en fractions simples

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D-r} + \frac{A_2}{(D-r)^2} + \cdots + \frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1}{(D-s)} + \cdots$$

Servons-nous de la représentation symbolique des intégrales (n° 172), *je dis que la réduction de l'intégration de l'équation* (22) *à celle des équations simples, donc à des quadratures* (*n°* 174), *se fait par la formule de décomposition précédente, c'est-à-dire que l'on a*

$$(23) \quad y = \frac{\varphi(x)}{f(D)} = \frac{A_1\varphi}{D-r} + \frac{A_2\varphi}{(D-r)^2} + \cdots + \frac{A_\lambda\varphi}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1\varphi}{D-s} + \cdots$$

En effet : 1°) cette expression est *une intégrale*, car on a, par définition des symboles mis entre crochets,

$$(D-r)\left[\frac{\varphi}{D-r}\right] = \varphi, \quad (D-r)^2\left[\frac{\varphi}{(D-r)^2}\right] = \varphi, \cdots$$

et, par conséqnent, en effectuant sur y l'opération $f(D)$, il vient

$$f(D)y = \left[A_1\frac{f(D)}{D-r} + A_2\frac{f(D)}{(D-r)^2} + \cdots\right]\varphi = \varphi,$$

car φ est soumis à une opération *d'effet nul*, en vertu de l'identité (5).

2°) L'expression (23) est l'*intégrale générale*, car, si l'on réunit tous les termes renfermant des constantes d'intégration, on forme l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Donc cette expression est la somme d'une intégrale particulière de l'équation complète et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

180. Remarques. — 1. La formule (23) rattache les constantes $A_1, A_2, \ldots$ à la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples, ce qui permet de calculer directement ces constantes par les procédés connus. C'est l'avantage de cette formule sur la formule (2) du n° 158. Celle-ci conduit à exprimer ces mêmes constantes en fonction de

toutes les racines r, s,... de l'équation caractéristique, d'où résultent des réductions laborieuses.

II. *Pratiquement*, pour former l'intégrale générale par la formule (**23**), on cherchera seulement une solution particulière de chaque équation simple et on ajoutera à leur somme l'intégrale générale de $f(D)y = 0$.

III. *Si les racines r, s,... ne sont pas toutes réelles*, la solution sera, en apparence, compliquée de coefficients et d'exponentielles imaginaires, mais ces imaginaires disparaîtront d'elles-mêmes par l'addition des termes conjugués, ainsi que nous l'avons vérifié pour l'équation sans second membre.

IV. *Si toutes les racines de f(D) sont simples*, la décomposition en fractions simples se fait par la formule connue (*t.* 1er, n° 108) et la formule d'intégration devient

$$y = \frac{\varphi(x)}{f(D)} = \frac{1}{f'(r)}\frac{\varphi}{D-r} + \frac{1}{f'(s)}\frac{\varphi}{D-s} + \cdots$$

Remplaçons chaque terme de cette formule par l'intégrale particulière (**12**) du n° 174 et ajoutons l'intégrale générale Y de l'équation sans second membre, nous obtenons l'intégrale *sous la forme pratique*

$$(24) \qquad y = Y + \int_{x_0}^{x}\left[\frac{e^{r(x-t)}}{f'(r)} + \frac{e^{s(x-t)}}{f'(s)} + \cdots\right]\varphi(t)\,dt.$$

V. On obtient, dans le cas général, une formule pratique, analogue à la précédente, en remplaçant chaque terme de la formule (**23**) par l'intégrale particulière (**13**) du n° 175.

181. Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$(D^2 + a^2)y = (D + ai)(D - ai)y = \varphi(x).$$

Les racines sont $r = ai$, $s = -ai$ et l'on a $f'(D) = 2D$; faisons $x_0 = 0$ dans la formule (**24**), elle nous donne

$$y = Y + \int_0^x \frac{e^{ai(x-t)} - e^{-ai(x-t)}}{2ai}\varphi(t)\,dt.$$

Remplaçons encore Y par sa valeur, nous obtenons l'intégrale

$$y = A\cos ax + B\sin ax + \frac{1}{a}\int_0^x \varphi(t)\sin a(x-t)\,dt.$$

182. Intégration de l'équation complète par la détermination directe d'une intégrale particulière. — Quand on trouve facilement une intégrale particulière de l'équation complète, l'intégrale générale s'obtient le plus facilement en ajoutant à celle-là l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Nous allons examiner les principales formes du second membre pour lesquelles on trouve directement une intégrale particulière. Nous supposerons l'équation mise sous la forme

$$f(D)y = \varphi(x).$$

Premier cas : $\varphi(x)$ *est un polynome* P_k *de degré* k. L'équation est donc de la forme

$$f(D)y = P_k.$$

Si $f(D)$ *n'a pas de racine nulle, l'équation admet comme solution particulière un polynome déterminé de degré* k ; *si* $f(D)$ *a* λ *racines nulles, l'équation admet une solution particulière de la forme* $x^\lambda Q_k$ *où* Q_k *est encore un polynome déterminé de degré* k.

Ces polynomes peuvent s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés, ou par le procédé suivant, qui nous servira de démonstration.

En premier lieu, si $f(D)$ n'a pas de racine nulle, on peut développer $1 : f(D)$ suivant les puissances de D par la formule de Maclaurin. Arrêtons-nous après le terme d'ordre k ; nous aurons, M désignant un polynome (*t.* 1[er], n° 90),

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + \cdots + b_k D^k + D^{k+1}\frac{M}{f(D)},$$

d'où l'identité

$$1 = f(D)\,(b_0 + b_1 D + \cdots + b_k D^k) + MD^{k+1}.$$

Le second membre définit donc une opération d'effet nul ; effectuons-la sur P_k, en observant que $D^{k+1}P_k = 0$; il vient

$$f(D)[(b_0 + b_1 D + \cdots + b_k D^k)P_k] = P_k.$$

Donc, *si* $f(D)$ *n'a pas de racine nulle, on obtient une solution particulière en faisant la somme des termes de degrés* $\leqq k$ *dans le développement de* $1 : f(D)$ *suivant les puissances de* D *et en effectuant sur* P_k *l'opération représentée par cette somme. Le résultat sera un polynome de degré* k.

En second lieu, si $f(\mathrm{D})$ a λ racines nulles, observons que l'on aura $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^\lambda f_1(\mathrm{D})$; mettons l'équation sous la forme

$$f_1(\mathrm{D})[\mathrm{D}^\lambda y] = \mathrm{P}_k$$

et prenons $\mathrm{D}^\lambda y$ pour inconnue. Nous sommes ramenés au cas précédent. Donc $\mathrm{D}^\lambda y$ est un polynome de degré k, qui peut se calculer à l'aide du développement de $1 : f_1(\mathrm{D})$ par la formule de Maclaurin. Connaissant $\mathrm{D}^\lambda y$, tirons-en une solution y par λ quadratures sans introduire de constante : cette solution sera de la forme $x^\lambda \mathrm{Q}_k$.

Chaque fois que l'on connaît ou que l'on obtient facilement le développement de Maclaurin sur lequel repose le calcul précédent, cette méthode est la plus commode en pratique et, dans les cas simples, elle permet même d'écrire à première vue une solution de l'équation. Mais, si le développement en question ne s'obtient que par des calculs minutieux, il sera généralement plus expéditif d'employer la méthode des coefficients indéterminés. On substituera dans l'équation une expression de la forme indiquée en laissant indéterminés les coefficients du polynome Q_k. En identifiant les deux membres, on obtiendra un système d'équations linéaires déterminant tous les coefficients inconnus, car, comme aucun terme de la solution particulière cherchée n'entre dans l'intégrale de l'équation sans second membre, aucun des coefficients ne peut rester arbitraire.

Deuxième cas. *Si $\varphi(x)$ est le produit d'un polynome par une exponentielle*, l'équation est de la forme

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{P}_k e^{ax}.$$

Ce cas se ramène au précédent par la substitution

$$y = e^{ax}z.$$

En effet, par la formule (8) du n° (173), on a $f(\mathrm{D})y = e^{ax}f(\mathrm{D}+a)z$. Donc, après suppression du facteur commun e^{ax}, l'équation transformée sera

$$f(\mathrm{D}+a)z = \mathrm{P}_k.$$

Connaissant une solution particulière z, on en déduit une solution particulière y.

Troisième cas. *Si $\varphi(x)$ est une somme de termes des types précédents*, donc si l'équation est de la forme

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{P}_k + \mathrm{Q}_l e^{ax} + \cdots,$$

on cherchera séparément des intégrales $u, v, \ldots$ des diverses équations

$$f(\mathrm{D})u = \mathrm{P}_k, \qquad f(\mathrm{D})v = \mathrm{Q}_l\, e^{ax}, \ldots.$$

et, en faisant leur somme $u + v + \cdots$, on aura une intégrale particulière de la proposée. On le constate par l'addition des équations précédentes.

Quatrième cas. *Si l'équation est de l'une des formes suivantes :*

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{P}_k e^{ax} \cos bx, \qquad f(\mathrm{D})z = \mathrm{P}_k e^{ax} \sin bx,$$

on peut la ramener aux types précédents en remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires ; mais, si les données sont réelles, on obtiendra plus facilement une intégrale en prenant respectivement pour y et pour z la partie réelle et le coefficient de i dans une solution u de l'équation

$$f(\mathrm{D})u = \mathrm{P}_k\, e^{(a+bi)x}$$

car cette équation se décompose dans les deux précédentes en posant $u = y + zi$.

183. Exemples. — Soient à intégrer les deux équations

$$(\mathrm{D}^2 + 1)y = \cos x, \qquad (\mathrm{D}^2 + 1)z = \sin x.$$

Nous intégrons d'abord $(\mathrm{D}^2 + 1)u = e^{ix}$. Substituant $u = te^{ix}$, il vient

$$[(\mathrm{D} + i)^2 + 1]t = 1, \qquad \text{d'où} \qquad (\mathrm{D} + 2i)\mathrm{D}t = 1$$

Le terme de degré 0 dans $1 : (\mathrm{D} + 2i)$ est $1 : 2i$; on a donc

$$\mathrm{D}t = \frac{1}{2i}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{x}{2i}, \qquad u = \frac{xe^{ix}}{2i}.$$

Les intégrales particulières cherchées y et z seront

$$y = \frac{x \sin x}{2}, \qquad z = -\frac{x \cos x}{2}.$$

184. Equations d'Euler réductibles à celles à coefficients constants. — Elles sont de la forme

$$(25) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = \varphi(x).$$

et elles se ramènent aux coefficients constants en changeant de variable indépendante par la substitution

$$x = e^t, \qquad dx = e^t dt.$$

En effet, soit D le signe de dérivation par rapport à t ; ayons égard à la formule $\mathrm{D}.e^{ax}u = e^{ax}(\mathrm{D} + a)u$; il vient, de proche en proche,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\mathrm{D}y, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\mathrm{D}(e^{-t}\mathrm{D}y) = e^{-2t}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y, \cdots$$

c'est-à-dire

$$x\frac{dy}{dx} = \mathrm{D}y, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\,y, \quad \ldots$$

et, en général,

$$x^p\frac{d^py}{dx^p} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)\ldots(\mathrm{D}-p+1)\,y.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (**25**), elle se transforme en une autre à cœfficients constants, que l'on peut écrire immédiatement.

Remarque. — Si l'on considérait l'équation plus générale

$$(px+q)^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(px+q)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_ny = \varphi(x),$$

on la ramènerait à la précédente en prenant $px+q$ comme variable indépendante.

EXERCICES.

1. Intégrer les équations suivantes (méthode du nº 182) :

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + 1)\,y = \sin 2x$$
$$(\mathrm{D}^4 + 2\,\mathrm{D}^2 + 1)\,y = x^2\cos ax$$
$$(\mathrm{D}^2 + 4)\,y = x\sin^2 x$$
$$(\mathrm{D} + 1)^3y = e^{-x} + x^2.$$
$$(\mathrm{D} + c)^n y = \cos ax.$$

2. Réduire à des quadratures les équations précédentes après y avoir remplacé le second membre par une fonction quelconque $\varphi(x)$. Etudier, en particulier, le cas où $\varphi(x) = x^{-1}$, $\operatorname{tg} x$, etc.

§ 5. Intégration par les séries de certaines équations linéaires du second ordre. Équations de Bessel et de Riccati.

185. Fonction et équation de Bessel. — Soit n un nombre quelconque (non entier, s'il est négatif). Nous définirons la *fonction* I_n *de Bessel* par la série potentielle, convergente pour toutes les valeurs de x,

$$(1)\quad \mathrm{I}_n = \sum_0^\infty a_p x^p \qquad \text{où} \qquad a_p = \frac{1}{p!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

et nous conviendrons que, si $p = 0$, on a $0! = 1$, $a_0 = 1$.

Cette fonction vérifie une équation différentielle que nous allons former. On a

$$\frac{d}{dx} \cdot x^n \mathrm{I}_n = \Sigma (n+p)\, a_p x^{n+p-1}$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx} x^n \mathrm{I}_n = \Sigma\, p(n+p)\, a_p x^{p-1} = \Sigma a^{p-1} x^{p-1} = \mathrm{I}_n$$

C'est l'équation cherchée, qui peut s'écrire, tous calculs faits,

$$x \frac{d^2\mathrm{I}_n}{dx^2} + (1+n) \frac{d\mathrm{I}_n}{dx} - \mathrm{I}_n = 0.$$

Donc I_n est une intégrale particulière de l'équation

$$(2)\qquad x \frac{d^2y}{dx^2} + (1+n) \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

que nous appellerons *équation de Bessel* [1].

186. **Théorème.** — *L'équation de Bessel ne change pas de forme par la substitution*

$$y = \frac{z}{x^n},$$

seulement n change de signe dans cette équation.

On tire, en effet, de cette relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n} \frac{dz}{dx} - \frac{nz}{x^{n+1}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^n} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{2}{x^{n+1}} \frac{dz}{dx} + \frac{n(n+1)z}{x^{n+2}}$$

et, par la substitution de ces valeurs, l'équation de Bessel devient

$$(3)\qquad x \frac{d^2z}{dx^2} + (1-n) \frac{dz}{dx} - z = 0.$$

Remarques. I. Si x est négatif, la substitution précédente peut être imaginaire, mais la substitution

$$y = \frac{z}{(-x)^n}$$

sera réelle et conduira à la même équation (**3**), car la nouvelle valeur

[1] On prend souvent aussi comme forme canonique de l'équation de Bessel les équations (11) du n° 191 ou encore d'autres transformées que nous ne rencontrerons pas ici.

de z ne diffère de la précédente que par un facteur constant. On peut donc toujours éviter l'introduction des imaginaires.

II. Il résulte du théorème précédent que, dans l'étude de l'équation de Bessel, il sera toujours permis de supposer n nul ou positif, car, si n était négatif, on le rendrait positif par la substitution précédente.

187. Intégration de l'équation de Bessel quand n n'est pas un nombre entier. — Dans ce cas, *l'intégrale générale s'exprime par les fonctions de Bessel.*

En effet, I_n est une première intégrale particulière de l'équation (2) ; I_{-n} est une intégrale particulière de l'équation (3), donc $I_{-n} : x^n$ est une seconde intégrale particulière de l'équation (2) et elle est évidemment indépendante de la première, parce qu'elle renferme des puissances fractionnaires. L'intégrale générale de l'équation (2) sera donc

$$y = C\,I_n + C_1 \frac{I_{-n}}{x^n}. \tag{4}$$

Si x était négatif et qu'on voulût éviter l'introduction des imaginaires, on remplacerait au besoin le dénominateur x^n par $(-x)^n$.

Remarque. — Si n est entier, une des deux séries I_n ou I_{-n} cesse d'exister, car tous ses coefficients deviennent infinis à partir d'un certain rang. Mais il y a toujours une des deux séries et, par conséquent, une des deux intégrales particulières qui subsiste. Dans ce cas, l'intégration se ramène aux quadratures par les théorèmes généraux (nº 161).

Supposons que n soit positif ; c'est alors l'intégrale particulière I_n qui subsiste et la formule d'intégration sera (nº 161, formule 8).

$$y = CI_n + C_1 I_n \int \frac{dx}{x^{n+1} I_n^2}$$

Mais cette intégrale peut encore s'exprimer par des séries potentielles, moins simples toutefois que celles de Bessel. Nous allons les faire connaître.

188. Nouvelles séries liées à celle de Bessel. — En dérivant I_n par rapport à n, on forme une nouvelle série potentielle, convergente pour toutes les valeurs de x et à coefficients rationnels. Nous la désignerons par I'_n et l'on aura, a_p étant défini par la formule (1),

$$I'_n = \sum_1^\infty a'_p x^p, \qquad a'_p = -a_p \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

Considérons, d'autre part, la série potentielle, dépendant de deux paramètres ε et n,

$$\varphi(x, n, \varepsilon) = 1 + \frac{x}{(n+1)(\varepsilon+1)} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \cdots$$

laquelle se réduit à I_n pour $\varepsilon = 0$.

Celle-ci peut être dérivée par rapport à ε et l'on trouve, pour $\varepsilon = 0$, la série potentielle à coefficients rationnels

$$(6)\qquad \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) = \sum_1^\infty b_p x^p, \qquad b_p = -a_p \sum_1^p \frac{1}{i}.$$

Nous allons montrer que, quand n est entier, l'intégration de l'équation de Bessel se fait au moyen des séries (1), (5) et (6).

189. **Intégration de l'équation de Bessel quand n est nul.** — Dans ce cas, les deux séries I_n et I_{-n} se confondent. Nous avons toujours une intégrale particulière I_0. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

A cet effet, considérons d'abord l'équation dans laquelle n est une quantité positive infiniment petite ε. Nous avons les deux intégrales distinctes I_ε et $I_{-\varepsilon} : x^\varepsilon$. Mais nous pouvons remplacer la seconde par la combinaison linéaire

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[I_\varepsilon - \frac{I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon}\right] = \frac{x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon . \varepsilon}.$$

Quand ε tend vers 0, celle-ci a une limite finie Y_0, qui s'obtient par la règle de l'Hospital :

$$(7)\qquad Y_0 = \lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon \left[x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}\right] = I_0 \operatorname{Log} x + 2 I_0'.$$

Cette nouvelle intégrale Y_0 s'exprime donc au moyen de la fonction de Bessel I_0 et de la série (5) I_0'. Elle est évidemment distincte de I_0 puisqu'elle renferme un logarithme. L'intégrale générale sera

$$y = CI_0 + C_1 Y_0.$$

Remarque. — On a admis, dans cette démonstration, que la limite d'une intégrale de l'équation de Bessel où n tend vers 0, est une intégrale de cette équation pour $n = 0$. Ce postulat est une conséquence facile à tirer de la proposition V du n° 114. Nous ferons usage, dans le n° suivant, d'un postulat analogue fondé sur la même proposition.

190. **Intégration de l'équation de Bessel quand n est entier et > 0.** Si n est un entier différent de 0, on peut le supposer positif (n° 186). Dans ce cas, la série I_{-n} cesse d'exister, mais l'intégrale particulière I_n subsiste toujours. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

Remplaçons d'abord n par $n - \varepsilon$ (ε étant infiniment petit). Les n premiers termes de $I_{-n+\varepsilon}$ ne renferment pas le facteur ε au dénominateur et seront, par conséquent, finis : nous désignerons leur somme par N_ε. Tous les termes suivants, au contraire, sont infinis et ils renferment un facteur commun indépendant de x, que nous désignerons par $A_\varepsilon : \varepsilon$, en posant

$$A_\varepsilon = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\ldots(n-1-\varepsilon)}.$$

Considérons donc le produit $\varepsilon I_{\varepsilon-n}$; il peut, eu égard à la définition (n° 188) de $\varphi(x, n, \varepsilon)$, se mettre sous la forme suivante

$$(8) \qquad \varepsilon I_{\varepsilon-n} = \varepsilon N_\varepsilon + x^n A_\varepsilon \varphi(x, n, \varepsilon).$$

Donc, ε tendant vers 0, on a, à la limite, φ tendant alors vers I_n,

$$(9) \qquad [\varepsilon I_{\varepsilon-n}]_0 = x^n A_0 I_n, \qquad A_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(n-1)!}.$$

Tant que ε n'est pas nul, $I_{n-\varepsilon}$ et $\varepsilon I_{\varepsilon-n} : x^{n-\varepsilon}$ sont deux intégrales indépendantes de l'équation de Bessel, mais elles cessent d'être distinctes pour $\varepsilon = 0$, en vertu de l'équation (9). Pour en obtenir une nouvelle, considérons la combinaison linéaire (qui est aussi une intégrale)

$$\frac{\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}}{\varepsilon x^{n-\varepsilon}}$$

et cherchons-en la limite pour $\varepsilon = 0$. C'est une expression de la forme $0 : 0$; en vertu de la règle de l'Hospital, ce sera la valeur pour $\varepsilon = 0$ de

$$\frac{1}{x^n} D_\varepsilon [\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}]$$

Mais, pour $\varepsilon = 0$, il vient, par la formule (8),

$$D_\varepsilon (\varepsilon I_{\varepsilon-n}) = N_0 + x^n A_0 \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + x^n A'_0 I_n,$$

de sorte que la limite cherchée a pour expression

$$\frac{N_0}{x^n} + A_0 [\varphi'_\varepsilon (x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x] + A'_0 I_n.$$

Supprimant le dernier terme qui n'est pas distinct de I_n, nous formons notre seconde intégrale particulière Y_n, savoir

$$(10) \qquad Y_n = \frac{N_0}{x^n} + A_0 [\varphi'_\varepsilon (x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x].$$

Celle-ci s'exprime donc au moyen des trois séries potentielles I_n, I'_n et $\varphi'_\varepsilon (x, n, 0)$; la première est la fonction de Bessel et les deux autres sont définies par les formules (5) et (6). Le coefficient A_0 est une constante (9) et enfin, par définition de N_ε, N_0 comprend les n premiers termes de I_{-n}, de sorte que

$$\frac{N_0}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x}, \qquad c_p = \frac{(-1)^p}{p!\,(n-1)(n-2\cdots(n-p)}.$$

L'intégrale générale de l'équation de Bessel sera donc, dans ce cas-ci,

$$y = C I_n + C_1 Y_n.$$

191. Transformées de l'équation de Bessel. Equation de Riccati. — Changeons de variable indépendante par la relation $x = \varphi(t)$. En accentuant les dérivées par rapport à t, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3};$$

l'équation de Bessel

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+n)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

devient ainsi, après multiplication par x',

$$\frac{x}{x'}y'' + \left(1 + n - \frac{x}{x'}\frac{x''}{x'}\right)y' - x'y = 0.$$

Voici quelques cas particuliers :

1°) ~~Quel que~~ Quelque soit le signe de x, on peut toujours faire, sans introduire d'imaginaires, une des deux substitutions

$$x = \pm\frac{t^2}{4}, \quad \text{d'où} \quad x' = \pm\frac{t}{2}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{t}{2}, \quad \frac{x''}{x'} = \frac{1}{t}$$

L'équation transformée sera

$$(11) \qquad y'' + \frac{2n+1}{t}y' \mp y = 0.$$

2°) Plus généralement, faisons la substitution

$$x = \alpha t^\beta, \quad \text{d'où} \quad x' = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \frac{x''}{x'} = \frac{\beta-1}{t}.$$

L'équation transformée sera

$$t^2y'' + (\beta n - 1)\,ty' - \alpha\beta^2 t^\beta y = 0.$$

On peut disposer des trois constantes α, β et n de manière à identifier cette équation avec toute équation de la forme

$$t^2y'' + aty' + bt^m y = 0,$$

pourvu toutefois que b et m soient différents de 0, car la substitution suppose α et β différents de 0. Mais, si $m = 0$ ou si $b = 0$, cette dernière équation est une équation d'Euler (n° 184).

Les équations de cette dernière forme sont fréquentes dans les applications. Elles s'intégreront donc par les formules des n^{os} précédents, en remplaçant x par une expression convenable de la forme αt^β.

3° *La transformée d'Euler de l'équation de Riccati* (n° 132) s'obtient comme cas particulier de la transformation précédente.

Si l'on fait $n = 1 : \beta$ et qu'on change α en $\alpha : \beta^2$, on voit que l'équation de Bessel se ramène à

$$t^2 y'' - \alpha t^\beta y = 0, \qquad \text{par la substitution} \qquad x = \frac{\alpha t^\beta}{\beta^2}.$$

Faisons $\beta = m + 2$. On voit que l'*équation de Bessel* où $n = \dfrac{1}{m+2}$ se ramène à l'*équation transformée de Riccati* :

$$(12) \qquad y'' - \alpha t^m y = 0, \qquad \text{par la substitution} \qquad x = \frac{\alpha t^{m+2}}{(m+2)^2}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Si $m + 2$ n'est pas l'inverse d'un entier, l'équation (**12**) s'intègre par les transcendantes I_n et I_{-n} en faisant $n = 1 : (m + 2)$ et en remplaçant x par la fonction de t qui précède.

Si $m + 2$ est l'inverse d'un nombre entier, l'intégration exigera l'intervention des séries plus compliquées du n° 188.

Si $m+2=0$, l'équation (**12**) se réduit à une équation d'Euler (n° 184) et s'intègre sans difficulté.

On sait que l'équation de Riccati, sous sa forme primitive où elle est du premier ordre (n° 132), s'intègre sous forme finie quand $m : (m + 2)$ est un nombre pair. Nous allons voir au n° suivant que, dans ce cas, la transformée d'Euler s'intègre aussi sous forme finie. Il en résultera une nouvelle méthode pour calculer l'intégrale de l'équation de Riccati quand elle s'exprime sous forme finie [1]. Cette méthode est théoriquement plus complexe que celle du n° 132, mais elle a peut-être l'avantage au point de vue de la simplicité des calculs.

192. Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie. — *L'équation de Bessel s'intègre sous forme finie, si $n + \frac{1}{2}$ est un nombre entier (positif, nul ou négatif).*

Supposons, ce qui est permis, *n positif* (n° 186). Si $n + \frac{1}{2}$ est entier, c'est un entier positif p. Alors, par l'une des substitutions $x = \mp \frac{t^2}{4}$, l'équation de Bessel se ramène à l'une des deux équations (11)

$$(13) \qquad y'' + \frac{2p}{t} y' \pm y = 0.$$

Il faut donc montrer que *cette équation s'intègre sous forme finie quand p est un entier positif.*

A cet effet, observons que, t étant traité comme un paramètre, on a, par une intégration par parties,

[1] Il est clair que si la transformée d'Euler s'intègre sous forme finie, l'équation de Riccati s'intègre aussi sous forme finie. Mais la réciproque n'est nullement évidente, car, connaissant l'intégrale de l'équation de Riccati, celle de l'équation d'Euler dépend d'une quadrature.

$$\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^{p-1} u du = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^p du.$$

Nous allons tirer de cette relation la solution de l'équation de Bessel, en transformant les deux intégrales indéfinies qui y figurent par la formule symbolique du premier volume (nº 191), que voici

$$\int e^{tu} \mathrm{E}(u) du = \mathrm{E}(\mathrm{D}_t)\frac{e^{tu}}{t} + \mathrm{C},$$

et dans laquelle $\mathrm{E}(u)$ est un polynome. Cette formule s'applique aux deux intégrales susdites si p est entier positif, car $u(u^2 \pm 1)^{p-1}$ et $(u^2 \pm 1)^p$ sont des polynomes. Désignant par D les dérivées par rapport t, il vient ainsi, à une constante près par rapport à u,

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t} = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^p \frac{e^{tu}}{t}.$$

Mais cette constante est nulle, car, si l'on suppose t positif, les deux membres de cette relation s'annulent par $u = -\infty$. Donc cette relation est une identité. Elle subsiste pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t et de u, car les dérivées des exponentielles se calculent toujours par les mêmes règles.

Multiplions l'identité précédente par $2p : t$ et posons, dans les deux membres,

$$y = (\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t}\ ; \tag{14}$$

elle prend la forme

$$(\mathrm{D}^2 \pm 1)y + \frac{2p}{t}\mathrm{D}y = \frac{e^{tu}}{t}(u^2 \pm 1)^p.$$

Le premier membre est précisément celui de l'équation (**13**). Donc, comme p est > 0, il suffit de choisir u de manière à annuler $u^2 \pm 1$ pour obtenir par la formule (**14**) une solution de l'équation (**13**). Examinons ces solutions pour chacune des déterminations du signe ambigu.

Premier cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

Il faut alors annuler $u^2 - 1$, ce qui donne pour u deux valeurs $+1$ et -1, auxquelles correspondent deux solutions indépendantes :

$$(\mathrm{D}^2 - 1)^{p-1}\frac{e^t}{t}, \qquad (\mathrm{D}^2 - 1)^{p-1}\frac{e^{-t}}{t}$$

ou, en faisant usage de la formule (**8**) du nº 173,

$$e^t(\mathrm{D} + 2)^{p-1}\mathrm{D}^{p-1}\frac{1}{t}, \qquad e^{-t}(\mathrm{D} - 2)^{p-1}\mathrm{D}^{p-1}\frac{1}{t}$$

Supprimant un facteur constant dans chacune de ces expresssions, on obtient les deux intégrales particulières pratiques

$$y_1 = e^t\left(1+\frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}, \qquad y_2 = e^{-t}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}$$

qui s'explicitent entièrement avec la plus grande simplicité. L'intégrale générale sera $y = Cy_1 + C_1y_2$.

Deuxième cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2p}{t}\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Il faut alors annuler u^2+1. Faisant $u = i$, on obtient la solution complexe

$$y = (D^2+1)^{p-1}\frac{e^{it}}{t}$$

qui se décompose elle-même en deux solutions réelles distinctes

$$y_1 = (D^2+1)^{p-1}\frac{\cos t}{t}, \qquad y_2 = (D^2+1)^{p-1}\frac{\sin t}{t}$$

qui peuvent servir à former l'intégrale générale.

Mais, si l'on veut effectuer tous les calculs, il sera plus simple de procéder comme dans le premier cas. Mettant l'intégrale complexe sous la forme

$$y = e^{it}(D+2i)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}$$

et supprimant un facteur constant, on a une nouvelle intégrale complexe

$$y = e^{it}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}.$$

Celle-ci s'exprime immédiatement sous forme explicite et l'on obtient deux intégrales réelles indépendantes en séparant le réel et l'imaginaire. Nous ne les écrirons pas. Si l'on ne se préoccupait pas d'obtenir une intégrale de forme réelle, on obtiendrait immédiatement une seconde intégrale complexe indépendante de la précédente en remplaçant dans celle-ci i par $-i$.

Equation de Riccati. L'équation $y'' - \alpha t^m y = 0$ se ramène à celle de Bessel où $n = 1 : (m+2)$. Pour que $n+\frac{1}{2}$ soit entier, il faut ainsi que

$$\frac{1}{m+2}+\frac{1}{2} \text{ soit entier } \left(\text{ou } \frac{m}{m+2} \text{ pair}\right).$$

Donc, pour que la transformée d'Euler de l'équation de Riccati puisse se ramener aux équations que nous venons d'intégrer, il faut que $m : (m+2)$ soit un nombre pair. C'est donc la même condition d'intégrabilité sous forme finie que pour l'équation de Riccati non transformée.

§ 6. Intégration ou réduction d'équations différentielles par des procédés particuliers.

193. Equations où manque y. — Quand la fonction inconnue y manque dans une équation, *on abaisse d'une unité l'ordre de cette équation* en posant $p = \frac{dy}{dx}$ et en prenant p comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation proposée

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

se ramène ainsi à la suivante

$$(2) \qquad f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots \frac{d^{n-1} p}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

On intègre l'équation (2), ce qui conduit à une relation

$$(3) \qquad \mathrm{F}\,(p, x) = 0.$$

Le calcul peut alors s'achever de deux manières :

1° On résout l'équation (3) par rapport à p, ce qui donne $p = \varphi(x)$ et l'intégrale générale y de l'équation (1) s'en déduit par une quadrature

$$y = \int p\, dx = \int \varphi(x) dx.$$

2° S'il est plus facile de résoudre l'équation (3) par rapport à x, on en tire $x = \psi(p)$. Alors on cherche aussi la valeur de y en fonction de p et il vient, par une quadrature,

$$y = \int p\, dx = \int p\, \psi'(p)\, dp = p\, \psi(p) - \int \psi(p)\, dp.$$

On connaît donc x et y en fonction de p : c'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale. Il suffirait d'éliminer p pour revenir au mode de représentation habituel.

Par exemple, l'équation (où X et X_1 dépendent de x seul)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{X} \frac{dy}{dx} = \mathrm{X}_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

se ramène à une équation de Bernoulli (n° 129)

$$\frac{dp}{dx} + \mathrm{X}\, p = \mathrm{X}_1\, p^2.$$

Donc p, puis y s'obtiennent par des quadratures en fonction de x.

Plus généralement, *si y et ses $k - 1$ premières dérivées manquent dans l'équation, l'ordre s'abaissera de k unités* en posant $\frac{d^k y}{dx^k} = u$ et en prenant u comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation d'ordre n sera ramenée à celle d'ordre $n - k$

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \cdots \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

L'intégrale de celle-ci sera de la forme

$$\text{(4)} \qquad F(u, x) = 0.$$

Comme ci-dessus, le calcul peut s'achever de deux manières :

1° On résout l'équation (4) par rapport à u, ce qui donne $u = \varphi(x)$ et l'intégrale générale y s'en déduit par k quadratures :

$$\text{(5)} \qquad y = \int\int \cdots \int \varphi(x)\, dx^k.$$

2° On résout l'équation (4) par rapport à x, d'où $x = \psi(u)$ et l'on obtient y en fonction de u par k quadratures :

$$\text{(6)} \qquad y = \int\int \cdots \int u\, dx^k = \int\int \cdots \int u \left[\psi'(u)\, du\right]^k$$

on a ainsi une *représentation paramétrique* de l'intégrale.

Remarque. — Les quadratures consécutives des formules (5) et (6) peuvent se ramener à une seule intégration par la formule (14) du n° 175, où il faut faire $r = 0$. La formule (5), en particulier, sera remplacée par

$$y = P_{k-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi(t)\, dt$$

où P_{k-1} est un polynome en x arbitraire et de degré $< k$.

Exemples. — Les équations suivantes s'intègrent sous forme finie :

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2$$

$$1 + y'^2 + xy'y'' = ay'' \sqrt{1 + y'^2}.$$

On pose $y' = p$. La première équation est linéaire en p ; la seconde devient différentielle exacte (n° 123) en la divisant par $\sqrt{1+p^2}$.

194. Cas particulier. Equations qui ne contiennent que deux dérivées consécutives. — *Elles s'intègrent par des quadratures.*

En effet, elles sont de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

donc, par la substitution $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u$, elles se ramènent à une équation du premier ordre et à variables séparées

$$\frac{du}{dx} = f(u) \qquad \text{d'où} \qquad x = \int \frac{du}{f(u)} = \psi(u).$$

La valeur de y s'en déduit par $n - 1$ quadratures par l'une des deux méthodes 1° ou 2° du n° précédent. La méthode 2° se présente la première, puisque l'on connaît déjà la relation $x = \psi(u)$, et la valeur de y en fonction de u est immédiatement donnée par la formule (6). Pour employer la méthode 1°, il faut commencer par tirer $u = \varphi(x)$ de la relation $x = \psi(u)$ et alors y est donné en fonction de x par la formule (5).

Exemples. — Voici quelques équations pour lesquelles les quadratures se font aisément sous forme finie :

$$ay'' = \sqrt{1 + y'^2} \qquad ay'' = y'(1 + y'^2)$$
$$ay'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \qquad y^{\text{IV}} = \sqrt{y'''}$$

195. Equations où manque x. — Quand la variable indépendante x manque, l'équation est de la forme

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{7}$$

Son ordre peut être abaissé d'une unité.

En effet, ce cas se ramène à celui où c'est la fonction qui manque (n° 193) en considérant x comme fonction de y. Mais il faut, pour cela, remplacer les dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au moyen des dérivées de x par rapport à y. Celles-ci étant désignées par des accents, les formules (2) du n° 152 du 1er volume donnent, comme cas particulier, en y faisant $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \dots$$

On substituera ces valeurs dans l'équation proposée et l'ordre s'abaissera d'une unité en prenant x' pour inconnue.

Mais, en pratique, on ne fait guère cette transformation. On prend plutôt $p = \frac{dy}{dx}$ comme nouvelle inconnue et on la considère comme fonction de y. On obtient une équation d'ordre moins élevé entre y

et p, car les dérivées de y par rapport à x s'expriment au moyen de dérivées d'ordre moindre de p par rapport à y. Les formules de transformation sont

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right), \ldots$$

Donc, l'équation proposée qui est d'ordre n, se ramènera à une équation d'ordre $n - 1$ entre y et p. Soit

$$(8) \qquad f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

cette équation. Supposons qu'on sache l'intégrer, son intégrale sera

$$(9) \qquad F(y, p) = 0.$$

Le calcul peut alors s'achever de deux manières :

1°) On résout l'équation (9) par rapport à p, d'où $p = \varphi(y)$ et la valeur de x s'obtient par une quadrature :

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation proposée,

2°) S'il est plus facile de résoudre l'équation (9) par rapport à y, on en tire $y = \psi(p)$, ensuite x s'obtient aussi en fonction de p par une quadrature :

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p} = \frac{\psi(p)}{p} + \int \frac{\psi(p)\,dp}{p^2}.$$

Donc x et y sont exprimés en fonction de p : c'est une *représentation* paramétrique de l'intégrale.

Exemples. — I Soit l'équation importante

$$(10) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Il vient, par la transformation précédente,

$$p\frac{dp}{dy} = f(y), \qquad \text{d'où} \quad p^2 = 2\int f(y)\,dy, \qquad x = \int \left[2\int f(y)dy\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation (10), qui dépend, comme on le voit, de deux quadratures.

II Soient encore les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = Y_1\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + Y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = Y_1,$$

dans lesquelles Y et Y_1 dépendent de y seul. Elles se ramènent respectivement à une équation linéaire en p, ou linéaire en p^2 :

$$\frac{dp}{dy} + Yp = Y_1, \qquad \frac{d.p^2}{dy} + 2Yp^2 = 2Y_1.$$

Donc p, puis x s'obtiennent par des quadratures en fonction de y.

Pour les deux équations suivantes, par exemple, ces quadratures se font sous forme finie :

$$2(2a - y)\,y'' = 1 + y'^2$$
$$y \cdot y'' - y'^2 = y^2 \operatorname{Log} y.$$

196. Equations qui ne contiennent que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités. — *Elles s'intègrent par des quadratures.* C'est un nouveau cas particulier de la méthode du n° 193. L'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

se ramène, en posant $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u$, à celle

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u),$$

intégrée au n° précédent, et qui a pour intégrale

$$x = \int\left[2\int f(u)\,du\right]^{-\frac{1}{2}} du = \psi(u).$$

On en déduit la valeur de y par $n - 2$ nouvelles quadratures, en employant l'une des deux méthodes 1° ou 2° du n° 193. On a immédiatement y en fonction de u par la formule (6) (méthode 2°). Pour obtenir y en fonction de x par la formule (5) (méthode 1°), il faudra préalablement tirer $u = \varphi(x)$ de l'équation $x = \psi(u)$ ci-dessus.

Exemples. — On peut intégrer par cette méthode (ou par celle du n° 184) les deux équations suivantes, les quadratures se faisant sous forme finie,

$$x^2y''' = \lambda y' \qquad x^2y^{\text{IV}} = \lambda y''$$

197. Équations différentielles exactes. — Considérons l'équation

$$f(x, y, y', \ldots y^n) = 0.$$

Si l'on reconnaît dans son premier membre la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \ldots y^{n-1})$ quel que soit y, on dit que l'équation est

différentielle exacte et on peut en écrire immédiatement une intégrale première

$$F(x, y, y', \dots y^{n-1}) = C.$$

On trouvera ci-dessous la règle à suivre pour reconnaître si l'équation est différentielle exacte et pour obtenir la fonction F quand elle existe, mais cette règle est d'une application assez limitée en pratique.

Dans certains cas simples, on peut rendre l'équation différentielle exacte en la multipliant par un facteur facile à apercevoir et l'on peut abaisser l'ordre de l'équation d'une unité. Il n'y a pas de règle générale à donner, car cette méthode dépend de la perspicacité de l'opérateur, mais en voici un exemple :

Considérons l'équation, résolue (autrement) par Liouville,

$$y'' + Xy' = Yy'^2,$$

dans laquelle X dépend de x seul et Y de y seul. En la divisant par y', tous ses termes deviennent des dérivées exactes ; on a

$$\frac{y''}{y'} = Yy' - X.$$

On en tire, par une intégration,

$$\operatorname{Log} y' = \int Y dy - \int X dx \quad , \quad \text{d'où} \quad y' = e^{\int Y dy - \int X dx}$$

Les variables se séparent et l'on trouve l'intégrale générale

$$\int e^{-\int Y dy} dy = \int e^{-\int X dx} dx.$$

Remarque. — Il est à observer que l'équation

$$y'' + Py' = Qy'^2$$

s'intègre par quadratures dans les trois cas suivants : 1°) si P et Q dépendent de x seul (n° 193) ; 2°) si P et Q dépendent de y seul (n° 195) ; 3°) si P dépend de x seul et Q de y seul (on vient de le montrer).

Règle générale pour l'intégration des dérivées exactes. — Soit $f(x, y, y', \dots y^n)$ une fonction donnée. Pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \dots y^{n-1})$, il faut qu'on ait l'identité

$$f(x, y, y', \dots y^n) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{n-1}} y^n.$$

On en conclut la règle suivante pour reconnaître si F existe et déterminer en même temps cette fonction :

Il faut d'abord que la plus haute dérivée y^n n'entre dans f qu'au premier degré. On intègre alors le coefficient de y^n *partiellement* par rapport à y^{n-1}, c'est-à-dire comme si y^{n-1} était seule variable. Soit u_1 l'intégrale obtenue ; $f - \frac{du_1}{dx}$ ne contiendra plus de terme en y^n, de sorte que la plus haute dérivée sera y^{n-p} ($p \leqq 1$). Cette différence devant être une dérivée exacte en même temps que f, il faut que y^{n-p} n'y entre qu'au premier degré. On intégrera alors le coefficient de y^{n-p} partiellement par rapport à y^{n-p-1}, ce qui donnera une intégrale u_2. Alors $f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}$ ne contiendra plus que des termes d'ordre $< n - p$ et devra être une différentielle exacte, si f en est une. En continuant ainsi et si la fonction donnée f est une dérivée exacte, on parviendra, en dernier lieu, à un reste

$$f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} - \dots - \frac{du_k}{dx} = X$$

ne contenant plus de dérivée de y. Pour que celui-ci soit une dérivée exacte, il faut qu'il ne contienne plus que x. Si cette condition a lieu, on aura

$$F = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \int X dx.$$

Si cette condition n'avait pas lieu, ou si, dans le cours du calcul, on rencontrait un reste dans lequel la plus haute dérivée entrât à un degré supérieur au premier, la méthode cesserait d'être applicable et la fonction proposée ne serait pas une dérivée exacte.

Soit, par exemple, la fonction donnée

$$f = y + 3xy' + 2yy'^3 + (x^2 + 2y^2y')\, y''.$$

On aura succcessivement

$$u_1 = x^2y' + y^2y'^2, \qquad f - \frac{du_1}{dx} = y + xy',$$

$$u_2 = xy, \qquad f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} = X = 0.$$

Par conséquent, $F = x^2y' + y^2y'^2 + xy + C$.

198. Equations homogènes. — Il y en a de diverses espèces. Mais les divers cas que nous allons étudier ne s'excluent pas nécessairement l'un l'autre.

PREMIER CAS : *L'équation est homogène par rapport à y et à ses dérivées successives (ou par rapport à y, dy, d^2y,...)*, c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on y remplace y

par λy sans toucher à x, λ désignant une constante. *L'ordre de ces équations peut être abaissé d'une unité.*

En effet, faisons la substitution

$$y = e^z, \quad \text{d'où} \quad y' = e^z z', \quad y'' = e^z(z'' + z'^2), \ldots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation, e^z vient en facteur commun à une certaine puissance par suite de l'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la fonction inconnue z aura disparu de l'équation, donc l'ordre de l'équation s'abaissera d'une unité en prenant z' comme inconnue (n° 193).

Remarque. — Ce procédé s'applique à l'équation linéaire sans second membre, mais généralement sans avantage, parce qu'il enlève le caractère linéaire. Ainsi, par cette substitution, l'équation du deuxième ordre

$$y'' + \mathrm{P}y' + \mathrm{Q}y = 0$$

se ramène à l'équation, du premier ordre en z',

$$\frac{dz'}{dx} + (z'^2 + \mathrm{P}z' + \mathrm{Q}) = 0,$$

ce que nous avons déjà remarqué (n° 130).

Exemples. Appliquer cette méthode aux équations

$$ayy'' + by'^2 = yy'(c^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$xyy'' - xy'^2 = yy' + bxy'^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Les équations en z' sont des équations de Bernoulli et les intégrales s'obtiennent sous forme finie. Toutefois on intègre plus facilement la première équation en remarquant que tous ses termes deviennent des dérivées exactes quand on la divise par yy' (n° 197).

Deuxième cas : *L'équation est homogène par rapport à x et dx*, c'est-à-dire se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx sans toucher à y. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent en considérant y comme la variable indépendante et x comme la fonction inconnue. Il faudra donc remplacer le dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au moyen des dérivées de x par rapport à y (n° 195). Portant ces valeurs dans l'équation, on sera ramené au cas précédent.

En pratique, il est souvent préférable d'opérer autrement. On change de variable indépendante par la substitution $x = e^t$. Si l'on désigne

par D les dérivées relatives à t, on a, de proche en proche, par la formule (8) du n° (170),

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\, Dy, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\, D\,(e^{-t}\, Dy) = e^{-2t}\, D\,(D-1)\,y, \ldots$$

et, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt}\, D\,(D-1) \cdots (D-n+1)\, y.$$

Ainsi l'exposant de e^t dans l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ est précisément égal au degré d'homogénéité $-n$ de cette dérivée. Donc, si l'on porte ces valeurs de x, $\frac{dy}{dx}, \ldots$ dans l'équation, e^t vient en facteur commun à une puissance marquée par le degré d'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la variable indépendante t aura disparu. Donc l'ordre de l'équation peut être abaissé d'une unité (n° 195).

Il est à remarquer que, *pratiquement*, quand on substitue dans l'équation proposée les valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ indiquées ci-dessus, on négligera tout de suite les exponentielles e^{-t}, $e^{-2t}, \ldots$ qui disparaissent du résultat et l'on remplacera simplement x par 1.

Exemple. Soit l'équation (homogène de degré 0)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left[mx^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ny^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Par la substitution $x = e^t$, on a

$$D\,(D-1)\,y = (m\,Dy^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons $Dy = p$ pour inconnue ; on a $D^2y = p\frac{dp}{dy}$, d'où

$$p\frac{dp}{dy} - p = (mp^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}$$

C'est une équation homogène du 1er ordre (n° 125) ; l'intégration se ramène donc à des quadratures.

Troisième cas : *L'équation est homogène par rapport à x, y et leurs différentielles dx, dy, $d^2y, \ldots$*, c'est-à-dire qu'elle se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace à la fois x par λx et y par λy, λ désignant une constante. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent par la substitution $y = ux$ en con-

sidérant u comme nouvelle inconnue. En effet, si l'on change x en λx sans toucher à u, cela revient à changer x en λx et y en λy et l'équation entre u et x se reproduira multipliée par une puissance de λ ; donc elle sera homogène par rapport à x et à dx.

Pratiquement, on opère directement comme il suit : on change tout de suite de fonction et de variable par les formules

$$x = e^t, \qquad y = e^t u,$$

t désignant la nouvelle variable indépendante. On a alors, eu égard à la formule du n° précédent et à celle du n° (170),

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt}\,\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-n+1).e^t u$$
$$= e^{-(n-1)t}(\mathrm{D}+1)\,\mathrm{D}\ldots(\mathrm{D}-n+2)\,u.$$

Portant ces valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$,... dans l'équation proposée, on obtient une équation entre u et t où manque la variable indépendante t. Donc l'ordre de cette équation peut s'abaisser d'une unité.

Exemples : Les deux équations suivantes :

$$mx^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2, \qquad x^4\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

conduisent à des équations de Bernoulli en $\mathrm{D}u$ et ont respectivement pour intégrales :

$$\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 x = xe^{-\frac{y}{mx}}, \qquad y = x\left(\mathrm{C} - \text{arc sin}\frac{\mathrm{C}_1}{x}\right).$$

Quatrième cas : *L'équation est homogène par rapport aux quantités x, dx (considérées comme de degré* 1) *et y, dy, d^2y,.... (considérées comme de degré n)*, c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx et y par $\lambda^n y$. Ce cas se ramène au précédent en posant $y = z^n$. Mais il est inutile de passer par cette transformation. Il vaut mieux changer tout de suite de fonction et de variable par les formules

$$x = e^t, \qquad y = u\,e^{nt}.$$

Soit D l'indice de dérivation par rapport à t ; on aura, en général,

$$\frac{d^p y}{dx^p} = e^{-pt}\,\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\ldots(\mathrm{D}-p+1)\,ue^{nt}$$
$$= e^{(n-p)t}(\mathrm{D}+n)(\mathrm{D}+n-1)\ldots(\mathrm{D}+n-p+1)\,u$$

L'exposant de e^t est égal au degré d'homogénéité de $\frac{d^p y}{dx^p}$. Donc,

si l'on substitue ces valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$,... dans l'équation, l'exponentielle viendra en facteur commun et la variable t disparaîtra.

Exemple. Soit l'équation (homogène de degré 4, en considérant y comme un carré)

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2\,xy)\,\frac{dy}{dx} - 4\,y^2.$$

Par les substitutions $x = e^t$ et $y = u\,e^{2t}$, on trouve l'équation en u

$$D^2u + 2(1-u)\,Du = 0.$$

Le premier membre est une dérivée exacte, d'où l'intégrale première

$$Du - (1-u)^2 = C.$$

Les variables se séparent et l'intégration s'achève sans difficulté.

199. Equation du second ordre où manque $\frac{dy}{dx}$ (Equation de Jacobi). — Jacobi a montré que si l'on connaît une intégrale première de l'équation

$$(11) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

l'intégration s'achève par des quadratures. Soit, en effet, connue l'intégrale première (contenant une constante C)

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, C)\,;$$

je dis que $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ *sera le facteur intégrant* (n° 132) *de l'équation*

$$dy - \varphi\,dx = 0,$$

de sorte que l'intégrale générale sera

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi\,dx) = C_1.$$

Pour établir cette proposition, nous remarquons que toute intégrale de l'équation (**11**), vérifiant (**12**), satisfait aussi aux deux équations suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}, \qquad f(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\varphi(x, y, C),$$

obtenues en dérivant (**12**) puis en éliminant les dérivées de y. Mais la dernière équation, qui a lieu entre x, y et C seulement, est une *identité*, car elle est satisfaite par des valeurs arbitraires de x, y et y'

(donc de C qui est arbitraire avec y'). On peut donc la dériver partiellement par rapport à C ; on en déduit une nouvelle identité

$$\frac{d^2\varphi}{\partial x\,\partial C} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial C} = 0. \quad \text{c.-à-d.} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right).$$

C'est précisément la condition qui exprime que $\frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi\, dx)$ est une différentielle exacte.

Exemple. Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y(1 + \mathrm{tg}^2 x)$$

connaissant l'intégrale première

$$\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}\,x + C\cos x.$$

On aura $\frac{\partial\varphi}{\partial C} = \cos x$; l'intégrale générale sera donc

$$\int \cos x\,[dy - (y\,\mathrm{tg}\,x + C\cos x)\,dx] = y\cos x - \frac{C}{2}(x + \sin x\cos x) = C_1.$$

Remarqae. L'équation plus générale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x, y) = 0$$

s'intègre aussi par des quadratures quand on en connaît une intégrale première. En effet, on peut, par une quadrature, faire disparaître le terme du premier ordre ; il faut faire le changement d'inconnue, déjà indiqué (n° **146, II**),

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}$$

L'équation entre z et x sera une équation de Jacobi et l'on en connaîtra une intégrale première.

§ 7. Quelques applications géométriques.

200. **Problème.** *Trouver une courbe plane dont le rayon de courbure* R *soit une fonction donnée de l'abscisse.*

Soit X l'inverse de cette fonction, l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = X.$$

Mais $1 : R$ est une dérivée exacte par rapport à x, car on a

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{y''}{y'^3}}{\left(1+\frac{1}{y'^3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Il vient donc, en intégrant les deux membres de (1),

$$\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \int X\,dx, \qquad \text{d'où} \qquad y' = \frac{\int X\,dx}{\sqrt{1-\left(\int X\,dx\right)^2}}.$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc

$$(3) \qquad y = \int dx \frac{\int X\,dx}{\sqrt{1-\left(\int X\,dx\right)^2}}$$

Le radical comporte un double signe qui correspond aux deux sens dans lequel la courbe peut tourner sa concavité.

201. Cas particulier (Courbe élastique). — *Trouver la courbe dont le rayon de courbure est en raison inverse de l'abscisse.*

Soit $\frac{a^2}{2}$ la raison constante, en sorte que

$$(4) \qquad R = \frac{a^2}{2x}, \qquad \frac{1}{R} = \frac{2x}{a^2}.$$

Il faut faire $X = 2x : a^2$ dans l'équation (3). Il viendra, en faisant apparaître les constantes d'intégration C et C_1,

$$\int X\,dx = \frac{x^2+C}{a^2}$$

$$(5) \qquad y - C_1 = \int \frac{(x^2+C)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+C)^2}}.$$

C'est l'équation de la courbe cherchée. Cette intégrale, qui ne peut s'exprimer sous forme finie, dépend des fonctions elliptiques. La courbe porte le nom de *courbe élastique*, parce que c'est la figure d'équilibre d'une lame élastique, quand, une des extrémités étant fixée, l'autre supporte un poids.

202. Problème. — *Trouver les courbes dans lesquelles le rayon de courbure est proportionnel à la normale.*

Soit a le rapport de proportionnalité ($a > 0$). On aura (*t.* I, nº 255)

$$\frac{N}{R} = -\frac{yy''}{1+y'^2} = \pm a$$

On prend le signe supérieur si R et N sont du même côté de la courbe, le signe inférieur dans le cas contraire.

C'est une équation où manque x (n° 195). Posons $y' = p$, elle devient

$$yp\frac{dp}{dy} = \mp a(1 + p^2), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2p\,dp}{1+p^2} = \mp \frac{2a\,dy}{y}$$

et, en intégrant,

$$1 + p^2 = Cy^{\mp 2a} \qquad\qquad p = \sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}$$

La valeur de x s'obtient alors par une quadrature

$$x - C_1 = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}}$$

Mais cette quadrature ne s'effectue sous forme finie que dans des cas particuliers, par exemple si $a = 1$. Examinons ce cas.

1° Si R et N sont du même côté de la courbe, on prend le signe supérieur : la courbe cherchée est un cercle

$$x - C_1 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C - y^2}} = -\sqrt{C - y^2}$$

d'où $(x - C_1)^2 + y^2 = C$.

2° Si R et N sont de part et d'autre de la courbe, celle-ci est une *chaînette*. En effet, prenant le signe inférieur et remplaçant C par $1 : \alpha^2$; il vient

$$x - C_1 = \int \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \alpha \operatorname{Log} \frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{\alpha}} + e^{-\frac{x - C_1}{\alpha}}\right)$$

203. Problème. — *Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure R soit proportionnel au rayon vecteur r.*

Utilisons les coordonnées polaires r et θ. L'équation de la courbe $R = nr$ s'écrira, d'après la valeur connue de R (*t.* I, n° 260), les dérivées étant relatives à θ,

$$(6) \qquad \mp (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = nr\,(r^2 + 2r'^2 - rr'').$$

Il faut prendre le signe + ou le signe — selon que la courbe tourne

sa concavité ou sa convexité vers le pôle, ou bien selon que R et r sont du même côté ou de part et d'autre de la courbe [1].

L'équation (6) est une équation homogène par rapport à r et ses dérivées. Par la substitution $r = e^z$, elle devient

$$\mp (1 + z'^2)^{\frac{3}{2}} = n (1 + z'^2 - z''), \quad \text{d'où} \quad \frac{z''}{1 + z'^2} = 1 \pm \frac{1}{n}\sqrt{1+z'^2}$$

On peut d'abord, en prenant le signe inférieur, satisfaire à cette équation par une valeur constante de z' (pourvu toutefois que n soit $\geqslant 1$). Il faut annuler le second membre, ce qui donne

$$z' = \sqrt{n^2 - 1}, \qquad \text{d'où} \qquad z = \theta\sqrt{n^2 - 1} + \text{const.}$$

La courbe correspondante est une spirale logarithmique $r = Ce^{\theta\sqrt{n^2-1}}$ et c'est une solution *particulière* du problème, car la forme de l'équation (6) exclut la possibilité d'une solution singulière.

Cherchons maintenant les courbes dans lesquelles z' varie. Prenons comme nouvelle variable indépendante l'angle α déterminé par les formules

$$z' = \operatorname{tg} \alpha, \qquad \pm\sqrt{1 + z'^2} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

de sorte que l'intervalle où varie α dépend du signe ambigu et réciproquement. L'équation prend la forme

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{1}{n\cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad d\theta = \frac{n\cos\alpha\, d\alpha}{1 + n\cos\alpha}.$$

Il vient alors

$$z = \int \operatorname{tg}\alpha\, d\theta = \int \frac{n\sin\alpha\, d\alpha}{1 + n\cos\alpha} = -\operatorname{Log}(1 + n\cos\alpha) + \text{const.}$$

On obtient ainsi une *représentation paramétrique* de la courbe cherchée

$$(7) \quad r = e^z = \frac{C}{1 + n\cos\alpha}, \qquad \theta = \int \frac{n\cos\alpha\, d\alpha}{1 + n\cos\alpha} = \alpha - \int \frac{d\alpha}{1 + n\cos\alpha}$$

Il est facile d'effectuer l'intégration.

Contentons-nous d'achever la solution pour $n = 1$, c'est-à-dire quand *le rayon de courbure est égal au rayon vecteur.*

[1] En effet, on doit prendre le signe + ou — selon que $r^2 + 2r'^2 - rr''$ est $>$ ou $<$ 0; donc, en vertu de la formule (**20**) du n° 260 du *t.* I, selon que la dérivée α' de l'inclinaison α de R sur l'axe polaire est $>$ ou $<$ 0; ou encore selon que α et θ varient dans le même sens ou en sens contraire, donc selon que R et r tournent dans le même sens ou non quand on décrit la courbe, ce qui revient à la règle énoncée.

La solution correspondant à la spirale logarithmique est un cercle $R = C$. Etudions la solution fournie par les formules (7).

Menons l'axe polaire de façon que θ s'annule avec α et soit r_0 la valeur de r pour $\theta = \alpha = 0$. Les équations (7) se réduisent à la forme simple

$$(8) \qquad r = \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \qquad \theta = \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ce sont les équations de la courbe cherchée.

On voit de suite qu'on retrouve le même point du plan quand α augmente de 2π. On obtient donc toute la courbe en faisant varier α de $-\pi$ à $+\pi$. D'ailleurs la courbe décrite dans l'intervalle $(0, -\pi)$ est symétrique (par rapport à l'axe polaire) de celle décrite dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Faisons donc varier α de 0 à π. On voit que la courbe est une spirale, formée d'un nombre infini de spires qui se développent indéfiniment. Cette courbe satisfait à l'équation (6) pour $n = 1$. Mais il faut prendre le signe supérieur dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ où $\cos \alpha$ est positif et où la courbe tourne dans sa convexité vers le pôle, le signe inférieur dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ où $\cos \alpha$ est négatif et où la courbe tourne sa concavité vers le pôle. Il n'y a que la première spire qui ne tourne pas autour du pôle.

204. Equation intrinsèque d'une courbe plane. — On appelle *équation intrinsèque* d'une courbe plane, la relation qui lie son rayon de courbure à son arc. Nous allons voir bientôt la raison de cette dénomination.

Supposons les coordonnées rectangulaires et soit

$$(9) \qquad \frac{1}{R} = f(s)$$

la relation donnée. C'est une équation différentielle du second ordre.

Soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x ; on a les formules connues

$$(10) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}.$$

Pour la généralité de ces formules, on doit considérer R comme susceptible des deux signes. En effet, ds étant supposé positif, $d\varphi$ est positif ou négatif suivant que la tangente tourne dans un sens ou dans l'autre. Donc, si l'on passe par un point d'inflexion, R change de signe.

On tire de la dernière équation (**10**)

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{R} = \varphi_0 + \int_0^s f(s)\, ds = \varphi_0 + F(s),$$

en désignant par φ_0 la valeur de φ au point pris comme origine des arcs.

Il vient ensuite, en intégrant les équations précédentes,

$$x = x_0 + \int_0^s \cos(\varphi_0 + F)\, ds, \qquad y = y_0 + \int_0^s \sin(\varphi_0 + F)\, ds.$$

C'est une représentation paramétrique de la courbe cherchée.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées à l'origine des arcs, x_0 et y_0 seront nuls ; si ensuite on prend la tangente à l'origine pour axe des x, φ_0 sera nul ; les équations précédentes se réduisent alors à

$$(11) \qquad x = \int_0^s \cos(F)\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin(F)\, ds$$

et, comme elles ne contiennent plus de constantes arbitraires, elles représentent une courbe complètement déterminée. Donc l'équation (**9**) ne représente que les courbes *complètement déterminées de forme* qu'on obtient en déplaçant celle-ci d'une manière arbitraire dans son plan. C'est pour cela que l'équation (**9**) porte le nom d'*équation intrinsèque.* On peut en déduire toutes les propriétés de la courbe considérée en elle-même, abstraction faite de sa position par rapport à toute autre ligne.

Remarquons encore que, dans l'intégration d'une équation intrinsèque, il sera inutile d'introduire des constantes arbitraires. On pourra toujours les réintroduire après coup par un déplacement arbitraire des axes coordonnés.

Voici quelques exemples :

I Soit à intégrer l'équation $R = a$. On aura

$$\varphi = \int \frac{ds}{R} = \frac{s}{a}, \quad x = \int \cos\frac{s}{a} ds = a \sin\frac{s}{a}, \quad y = \int \sin\frac{s}{a}\, ds = -a\cos\frac{s}{a}.$$

Eliminant s, on voit que la courbe est un *cercle* : $x^2 + y^2 = a^2$.

II. Soit à intégrer $R = \frac{s^2 + a^2}{a}$. On aura

$$\varphi = \int \frac{a\,ds}{s^2 + a^2} = \text{arc tg}\,\frac{s}{a}$$

$$x = \int \cos\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} = a \operatorname{Log} \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}$$

$$y = \int \sin\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{sds}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \sqrt{s^2 + a^2}$$

La courbe est une *chaînette* $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

III Soit encore à intégrer $R^2 + s^2 = 16a^2$. On aura, en prenant φ comme variable indépendante,

$$\varphi = \int \frac{ds}{\sqrt{16a^2 - s^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{s}{4a}, \qquad s = 4a \sin \varphi.$$

$$x = \int \cos \varphi \, ds = 4a \int \cos^2 \varphi \, d\varphi = a\,(2\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$y = \int \sin \varphi \, ds = 2a \int \sin 2\varphi \, d\varphi = -a \cos 2\varphi.$$

Si l'on change 2φ en $\pi + u$, ces deux dernières équations s'écrivent

$$x - a\pi = a\,(u - \sin u), \qquad y - a = -a\,(1 - \cos u)\,;$$

elles représentent donc une *cycloïde*.

Remarque. — Le problème de trouver une courbe définie par la relation $R = F(\varphi)$ entre le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente, se ramène au précédent par la relation $ds = R\,d\varphi$. On aura donc

$$x = \int F(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \qquad y = \int F(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi.$$

§ 8, Systèmes d'équations différentielles.

205. Systèmes canoniques. — Nous disons qu'un système d'équations différentielles entre plusieurs fonctions inconnues x, y,.... de t est *canonique*, si le nombre des équations est égal à celui des fonctions inconnues et si le système est résolu par rapport aux plus hautes dérivées de chaque inconnue. En pratique, on ne rencontre guère que des systèmes canoniques ou facilement réductibles à cette forme.

Un système canonique d'équations du premier ordre, résolu, par conséquent, par rapport aux dérivées premières des fonctions incon-

nues, est un *système normal.* Nous avons démontré précédemment l'existence des intégrales d'un système normal et nous avons montré que le nombre de constantes arbitraires comprises dans son intégrale générale est celui des fonctions inconnues ou des équations du système.

206. Théorème I. — *Tout système canonique d'équations d'ordre supérieur se ramène à un système normal, ne contenant que des dérivées premières, en considérant comme des inconnues auxiliaires toutes les dérivées, sauf celles de l'ordre le plus élevé pour chaque inconnue, et en ajoutant au système les équations qui définissent ces inconnues auxiliaires.*

Ainsi, par exemple, le système canonique

$$x'' = f_1(t, x, x', y, y', y''), \qquad y''' = f_2(t, x, x', y, y', y'')$$

revient au système normal de cinq équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = f_1(t, x, x', y, y', y''),$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = y'', \qquad \frac{dy''}{dt} = f_2(t, x, x', y, y', y'').$$

entre t et les cinq fonctions inconnues x, x', y, y', y''.

Il en résulte que pour obtenir le nombre d'inconnues (ou d'équations) du système normal auquel se ramène un système canonique, il faut ajouter les ordres des plus hautes dérivées de chaque inconnue.

Ce nombre sera aussi celui des constantes arbitraires des intégrales générales ; on peut donc le considérer comme caractérisant l'*ordre* du système canonique.

207. Théorème II. — *L'intégration d'un système normal de n équations à n inconnues se ramène à l'intégration d'une seule équation d'ordre n entre deux variables, ou bien à l'intégration successive de plusieurs équations entre deux variables, la somme des ordres de ces équations étant n.*

Le théorème est vrai pour une seule équation, il suffit donc de montrer qu'il est vrai pour un système normal de n équations, s'il est vrai pour un système normal d'ordre moins élevé.

Pour fixer les idées, considérons seulement le système suivant de trois équations à trois inconnues, le raisonnement étant général :

$$\text{(I)} \quad x' = f_1(t, x, y, z), \quad y' = f_2(t, x, y, z), \quad z' = f_3(t, x, y, z).$$

Si f_1 ne contient que les deux variables t et x, la première équation est du *premier ordre* à deux variables et détermine x. Portant la valeur de x dans les deux équations suivantes, on est ramené à intégrer un système normal de deux équations seulement. Dans ce premier cas, la proportion est établie.

Supposons donc que f_1 contienne une autre inconnue que x, par exemple y. Résolvons $f_1 = 0$ par rapport à y ; il vient

$$(1) \qquad y = \varphi(t, x, x', z).$$

Portons cette valeur dans les autres équations du système (I). En la substituant dans $y' = f_2$, la dérivée x'' s'introduit, mais nous résolvons l'équation par rapport à x''. Nous formons ainsi le système à deux inconnues x et z

$$(\text{II}) \qquad x'' = \varphi_2(t, x, x', z), \qquad z' = \varphi_3(t, x, x', z).$$

Si z disparaît de φ_2, l'équation $x'' = \varphi_2$ est du *deuxième ordre* à deux variables et détermine x. Portant la valeur de x dans la dernière équation, on est ramené à intégrer celle-ci qui est du *premier ordre*. Ensuite y est donné sans intégration par l'équation (1). Dans ce deuxième cas, la proposition est encore établie.

Supposons enfin, ce qui est la règle générale, que φ_2 contienne z. Tirons z de $x'' = \varphi_2$; il vient

$$(2) \qquad z = \psi(t, x, x', x'').$$

Portons cette valeur dans la dernière équation du système (II) ; nous introduisons x''' et en résolvant par rapport à x''', nous trouvons

$$(\text{III}) \qquad x''' = \psi_3(t, x, x', x'').$$

L'équation (III) est du 3e ordre à deux variables. L'intégration du système (I) revient à celle de cette unique équation (III), car, x étant connu, on obtient sans intégration z puis y par les relations (2) et (1). Dans ce troisième et dernier cas, le théorème est encore établi.

208. Remarque. — Tout système canonique d'équations d'ordre quelconque se ramenant à un système normal par l'adjonction d'inconnues auxiliaires, son intégration se ramène aussi à celle d'une ou de plusieurs équations à deux variables.

Quand la réduction à une seule équation est possible, celle-ci peut généralement s'obtenir sans passer par l'intermédiaire du système normal. Il suffit de dériver les équations du système un certain nom-

bre de fois, de manière à former le nombre d'équations nécessaire pour pouvoir éliminer toutes les dérivées sauf celles de l'une des fonctions inconnues.

Soit, par exemple, le système canonique entre x, y et t

$$x''' = y + y', \qquad y'' = x' + x''.$$

On forme l'équation à laquelle satisfait x, en dérivant deux fois la première équation et en remplaçant deux fois y'' par sa valeur $x' + x''$. Il vient successivement

$$x^{\text{IV}} = y' + x' + x'', \qquad x^{\text{V}} = x' + 2x'' + x'''.$$

L'intégration du système proposé dépend de cette dernière équation qui est linéaire et du 5ᵉ ordre. On détermine x par l'intégration de celle-ci ; après quoi, y, y' et y'' se tirent sans intégration des équations précédentes.

209. Réduction des systèmes quelconques à des systèmes canoniques. — Les théorèmes généraux qui précèdent ne s'appliquent qu'aux systèmes canoniques. Quand un système n'est pas canonique, il faudra commencer par le réduire, si l'on peut, à la forme canonique. Mais cette réduction n'est pas toujours possible, parce que le système peut être *indéterminé* ou *impossible*.

Nous ne considérons ici que les systèmes où le nombre des équations ne surpasse pas celui des inconnues et nous pouvons nous borner à ceux qui ne renferment que des dérivées premières, car, ainsi qu'on l'a déjà fait au nº 206, on peut toujours se débarasser des dérivées supérieures par l'adjonction d'inconnues auxiliaires.

Ceci posé, la discussion d'un système se fait en le ramenant à un *système résolu* et nous donnons, en abrégé, ce nom à un *système résolu par rapport à autant de dérivées qu'il y a d'équations*.

Si le nombre d'équations est égal à celui des inconnues, le système résolu est un *système normal*, ce qui nous ramène au cas précédent. Mais il peut arriver que le système résolu renferme plus d'inconnues que d'équations. Dans ce cas le système est *indéterminé*, car nous allons montrer que certaines inconnues demeurent arbitraires.

Considérons, pour fixer les idées, un système résolu de deux équations à quatres inconnues x, y, z, u.

$f_1(t, x, y, z, z', u, u')$ $\qquad$ $f_2(t, x, y, z, z', u, u')$

$$x' = f_1(t, x, y, z, u), \qquad y' = f_2(t, x, y, z, u).$$

Il est résolu par rapport aux dérivées de x et de y, mais il contient deux inconnues *supplémentaires* z et u. Ces inconnues supplémentaires demeurent complètement arbitraires. Mais, une fois ces fonctions choisies, la détermination des autres inconnues dépend de l'intégration d'un système normal.

La question de réduire un système quelconque à un système résolu trouve sa réponse dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout système de m équations du premier ordre à n inconnues ($n \geqslant m$) se ramène à un système résolu, ou bien on en tire les valeurs des inconnues sans intégration, ou bien on constate que le système est impossible.*

Soient x, y, z,... les n fonctions inconnues de t. Considérons le système

$$\text{(I)} \qquad f_1(t, x, x', y, y', z,...) = 0, \qquad f_2 = 0, \dots f_m = 0.$$

On peut généralement résoudre le système par rapport à m dérivées, en procédant de proche en proche comme il suit. On résout une équation, par exemple la première, par rapport à une dérivée, par exemple x', et l'on porte la valeur de x' dans les autres équations. On remplace ainsi le système (I) par le système équivalent

$$\text{(II)} \qquad x' = \varphi_1(t, x, y, y', z, z',...), \quad \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0,$$

où les φ ne contiennent plus x'.

On résout ensuite une autre équation (II), par exemple la seconde, par rapport à une dérivée, par exemple y', et l'on porte la valeur de y' dans les autres équations. On forme ainsi le système

$$\text{(III)} \qquad x' = \psi_1(t, x, y, z, z',...), \qquad y' = \psi_2, \dots \psi_m = 0.$$

Après m opérations semblables, supposées possibles, le système sera *résolu*.

On ne sera arrêté dans cette marche que si l'on parvient à un système dont une ou plusieurs équations ne contiennent plus de dérivées. Toutefois une équation qui se réduirait à une identité, ne troublerait pas la résolution succesive : elle disparaitrait tout simplement et le nombre des équations du système serait réduit.

Supposons donc que l'on parvienne à une équation *non identique* et ne contenant plus de dérivées. Deux cas sont possibles :

1° Si cette équation ne contient plus de variables ou ne contient plus que t, elle exprime une impossibilité, puisque t est une variable indépendante. Donc le système est *impossible*.

2° Si cette équation contient une inconnue, on en tire la valeur de cette inconnue, qu'on substitue dans les autres équations. On est ramené à considérer un système contenant une équation et une inconnue de moins. Alors on reprend sur celui-ci les mêmes calculs.

Comme ce genre de réduction ne peut se reproduire indéfiniment, on parviendra finalement soit à prouver l'impossibilité du système, soit à le ramener à un système résolu (qui peut d'ailleurs se réduire à une seule équation), soit à éliminer successivement toutes les dérivées, auquel cas le système se résout sans intégration.

§ 9. Systèmes linéaires.

210. Diverses espèces de systèmes linéaires. Leur intégration par réduction à des équations à deux variables. — On appelle *systèmes linéaires* ceux qui sont linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées ; systèmes *linéaires et homogènes* (ou *sans seconds membres*) ceux qui sont linéaires et homogènes par rapport à ces mêmes quantités ; systèmes *à coefficients constants*, ceux où les coefficients des inconnues et de leurs dérivées sont des constantes.

Tout système canonique d'équations différentielles simultanées se ramène à un système normal par l'adjonction d'inconnues auxiliaires. On constate immédiatement que cette réduction laisse subsister : 1° le caractère linéaire, 2° le caractère homogène, 3° celui de constance des coefficients, quand ces caractères existent dans le système proposé.

D'autre part, l'intégration d'un système normal se ramène à l'intégration d'une ou de plusieurs équations à deux variables. Cette réduction laisse aussi subsister le caractère linéaire et celui de constance des coefficients quand ces caractères existent.

Donc l'intégration des systèmes linéaires se ramène, par les principes généraux, à l'intégration d'une seule équation linéaire, donc aux méthodes des paragraphes 1 et 2.

De même, l'intégration des systèmes à coefficients constants se ramène à l'intégration d'une seule équation linéaire à coefficients constants, donc aux méthodes du § 4.

Toutefois, pour les systèmes à coefficients constants et sans seconds membres, cette méthode ne sera généralement pas la plus expéditive en pratique. La méthode directe indiquée au n° suivant sera préférable. Elle a d'ailleurs l'avantage de s'appliquer aussi facilement aux systèmes de forme quelconque qu'aux systèmes canoniques. Ensuite, pour les systèmes avec seconds membres, il y a lieu d'étudier le procédé de réduction de plus près, ce qui sera fait au n° 212.

211. Intégration des systèmes linéaires à coefficients constants et sans seconds membres. — Considérons, pour fixer les idées, un système (canonique ou non) de trois équations entre trois fonctions inconnues de t, de la forme

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} Lx + My + Nz &= 0, \\ L_1x + M_1y + N_1z &= 0, \\ L_2x + M_2y + N_2z &= 0, \end{aligned} \right.$$

L, M, N désignant des facteurs symboliques tels que

$$aD^m + a_1D^{m-1} + \ldots + a_m.$$

Nous appellerons *déterminant du système* le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}$$

et nous désignerons ses mineurs par

$$\begin{matrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}$$

Ce déterminant Δ joue un rôle essentiel dans l'intégration du système (1). Nous supposerons, dans le n° actuel, qu'il n'est pas identiquement nul.

Théorème. — *Les trois inconnues x, y, z vérifient la même équation linéaire à coefficients constants et sans second membre* $\Delta u = 0$.

En effet, multiplions respectivement les équations (1) par l, l_1, l_2 et ajoutons ; il vient, par les propriétés des mineurs $\Delta x = 0$. De même, $\Delta y = \Delta z = 0$.

Ce théorème conduit à la méthode la plus commode pour intégrer le système. C'est la *méthode des coefficients indéterminés.*

En effet, résolvons l'*équation caractéristique* $\Delta = 0$; soient r, s,... ses racines, λ μ,... leurs ordres de multiplicité. On aura nécessairement

$$\begin{cases} x = Pe^{rt} + Qe^{st} + \ldots, \\ y = P_1e^{rt} + Q_1e^{st} + \ldots, \\ z = P_2e^{rt} + Q_2e^{st} + \ldots, \end{cases}$$

les polynomes P étant de degré $\lambda - 1$, Q de degré $\mu - 1$,...

On substituera donc ces valeurs dans les équations (1) et l'on identifiera les résultats à zéro. Il en résultera un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients des polynomes P, entre ceux des polynomes Q,... séparément, car il ne se fait pas de réductions entre les termes contenant des exponentielles différentes. La solution contiendra autant de constantes arbitraires qu'il restera de coefficients indéterminés. Nous démontrerons, dans le n° suivant, que ce nombre est égal au degré de Δ que l'on appelle l'*ordre du système.*

Cette analyse tombe en défaut si Δ se réduit à une constante autre que 0 ; dans ce cas, le système se résout sans intégration : les équations $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, se réduisent simplement à $x = y = z = 0$. Ces valeurs satisfont au système (1) et il n'y a pas d'autre solution.

Cas d'un système normal. — C'est cette méthode que l'on applique, en pratique, pour l'intégration d'un *système normal*. Celui-ci est de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} (D + a)x + by + cz = 0, \\ a_1x + (D + b_1)y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + (D + c_2)z = 0. \end{array}\right.$$

Son intégration dépend donc de la résolution de l'*équation caractéristique*, qui est ici du 3ᵉ degré,

$$\begin{vmatrix} D + a & b & c \\ a_1 & D + b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & D + c_2 \end{vmatrix} = 0$$

et l'intégrale générale renfermera trois constantes, conformément aux théorèmes généraux.

Si $\Delta = 0$, la méthode ne s'applique plus, Il faut recourir au procédé général développé dans le nº suivant.

Exemple : Soit à intégrer le système normal

$$(D + 1)x - y = 0, \qquad x + (D - 1)y = 0$$

On a ici $\Delta u = D^2u = 0$. On doit donc substituer les valeurs

$$x = C + C't, \qquad y = C_1 + C'_1t,$$

ce qui conduit aux relations $C_1 = C + C'$ et $C'_1 = C'$. Les intégrales sont, avec deux constantes arbitraires C et C',

$$x = C + C't, \qquad y = C + C'(1 + t)$$

212. Systèmes à coefficients constants complets ou avec seconds membres. — Reprenons le système (1) du nº précédent, mais en mettant trois fonctions T, T_1 et T_2 de t dans les seconds membres. Nous obtenons le système complet

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} Lx + My + Nz = T, \\ L_1x + M_1y + N_1z = T_1, \\ L_2x + M_2y + N_2z = T_2. \end{array}\right.$$

La méthode générale d'intégration du système (**2**), applicable d'ailleurs au système (**1**), est la méthode de réduction à l'intégration d'une ou de plusieurs équations successives à deux variables (n° 207). Mais cette méthode présente, dans le cas qui nous occupe, des caractères particuliers qui méritent de fixer l'attention.

Elle consiste à appliquer le théorème suivant :

Théorème. — *On peut ramener le système* (2) *à un autre équivalent et de même déterminant* Δ, *mais dans lequel deux des coefficients de* x *sont nuls.*

En effet, supposons que L et L_1 diffèrent de 0 et que L soit de degré au moins égal à celui de L_1. En divisant L par L_1, on a

$$L = \lambda L_1 + R$$

et, si $R = L - \lambda L_1$ n'est pas nul, il sera de degré moindre que L et L_1. Ceci posé, multiplions la deuxième équation (**2**) par λ et soustrayons-la de la première. Nous formons un système équivalent à (**2**) et de même déterminant Δ

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{llll} (L - \lambda L_1)x + & (M - \lambda M_1)y + & (N - \lambda N_1)z & = T - \lambda T_1, \\ L_1 x + & M_1 y + & N_1 z & = T_1, \\ L_2 x + & M_2 y + & N_2 z & = T_2, \end{array} \right.$$

dans lequel la somme des degrés des coefficients de x est abaissée. Si deux des coefficients de x ne sont pas nuls dans le système (**3**), on abaissera de nouveau la somme des degrés des coefficients de x par une transformation analogue. Cet abaissement ne pouvant se répéter indéfiniment, on ramènera finalement le système (**2**) à un autre équivalent, de même déterminant Δ, et dans lequel deux des coefficients de x seront nuls. Désignons ce système par

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x + By + Cz = \tau, \\ \qquad B_1 y + C_1 z = T_3, \\ \qquad B_2 y + C_2 z = T_4, \end{array} \right.$$

les lettres δ, B, C représentant des facteurs symboliques et les seconds membres des fonctions connues de t.

L'intégration de ce nouveau système dépend de celle du système à deux inconnues y et z formé par les deux dernières équations. Mais il existe évidemment, pour ce système de deux équations, un théorème analogue à celui que nous venons de démontrer pour le système (**2**). On peut donc le ramener à un système équivalent où l'un des deux coefficients de y sera nul.

En définitive, après un nombre limité d'opérations (correspondant chacune à une division), le système (2) sera ramené à un autre équivalent, de même déterminant Δ, mais de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \delta x + By + Cz = \tau, \\ \qquad \delta_1 y + C_1 z = \tau_1, \\ \qquad\qquad \delta_2 z = \tau_2. \end{cases} \qquad (\Delta = \delta\delta_1\delta_2)$$

Celui-ci est préparé pour l'intégration.

Cas ou Δ n'est pas nul. — Aucun des facteurs symboliques δ, δ_1 δ_2 n'étant nul, l'intégration du système (4) ne dépend plus que de l'intégration d'équations à deux variables : la troisième donne z, ensuite la deuxième donne y et enfin la première donne x. Le nombre des constantes d'intégration est égal à la somme des ordres des équations intégrées, donc à la somme des degrés de δ_2, δ_1 et δ, c'est-à-dire au degré de Δ. C'est la conclusion fondamentale déjà énoncée au n° précédent.

En pratique, il arrive le plus souvent que δ et δ_1 se réduisent à de simples constantes. L'intégration du système (4) revient alors à l'intégration de la dernière équation seule

$$\delta_2 z = \tau_2, \qquad \text{ou} \qquad \Delta z = \delta\delta_1\tau_2.$$

Ensuite x et y sont donnés, sans intégration, par les deux équations précédentes.

Dans l'intégration du système (2) ou du système (4), on utilise souvent avec avantage le théorème suivant, qui se démontre comme dans le cas d'une seule équation (n° 157) :

Les intégrales générales du système complet s'obtiennent en ajoutant respectivement aux intégrales générales X, Y ,Z *du système sans seconds membres des solutions particulières* ξ, η, ζ *du système complet.*

On en conclut, en particulier, ce second théorème :

L'intégration d'un système avec seconds membres dont le déterminant Δ *est de degré n se ramène à n quadratures.*

En effet, considérons le système (4). Soient p, q, r les degrés de δ, δ_1 et δ_2. On obtient une intégrale particulière z (3ᵉ équation) par r quadratures faites sans introduire de constante arbitraire ; on obtient une valeur correspondante y (2ᵉ équation) par q quadratures sans introduire de constante ; enfin on obtient une valeur correspondante de x par p quadratures. Cela fait en tout $p + q + r = n$

quadratures. Pour avoir l'intégrale générale, il faudra ajouter aux valeurs précédentes les solutions générales de l'équation sans seconds membres, que l'on déterminera par la méthode du n° précédent.

Si l'on connaît d'avance ou si l'on trouve facilement une solution particulière du système complet, on sera dispensé de faire les quadratures exigées par le théorème précédent.

Cas ou Δ est nul. — *Le système est indéterminé ou incompatible.* Ce cas a peu d'importance pratique. Contentons-nous d'un exemple. Pour que Δ soit nul, il faut qu'un au moins des facteurs δ, δ_1 ou δ_2 soit nul : 1° Si δ_2 est nul, sans que τ_2 le soit, le système (4) est impossible. 2° Si δ_2 et τ_2 sont nuls tous deux (δ et δ_1 ne l'étant pas), la valeur de z reste arbitraire et le système (4) est indéterminé.

213. Théorèmes généraux sur les systèmes linéaires normaux. — Nous considérons d'abord un système de n équations sans seconds membres entre n fonctions inconnues $x, y, \ldots v$ de la variable t, de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} x' + ax + by + \cdots = 0, \\ y' + a_1x + b_1y + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

les lettres $a, b, \ldots a_1, \ldots$ désignant des fonctions données de t.

Théorème I. — *Si* $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots), \ldots$ *sont des systèmes de solutions particulières du système, les expressions*

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots, \qquad y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots, \qquad \ldots.$$

où C_1, C_2, *sont des constantes arbitraires seront de nouvelles intégrales du système.*

Substituons ces valeurs dans la première équation par exemple, il vient

$$C_1(x_1' + ax_1 + by_1 + \cdots) + C_2(x_2' + ax_2 + by_2 + \cdots) + \cdots = 0.$$

Définition. — On dit que p ($p \leqslant n$) solutions $(x_1, y_1, \ldots v_1), \ldots (x_p, y_p, \ldots v_p)$ du système (5) sont *indépendantes*, si l'un au moins des déterminants d'ordre p formés avec p lignes du tableau

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 & & v_p \end{matrix}$$

est différent de 0.

Par analogie, une seule solution $(x_1, y_1, \ldots)$ est *indépendante* si l'une au moins des fonctions $x_1, y_1, \ldots$ n'est pas nulle.

Théorème II. — *Le système* (5) *admet* n *solutions indépendantes et si* $(x_1, y_1, \ldots), \ldots (x_n, y_n, \ldots)$ *sont* n *solutions indépendantes, l'intégrale générale sera, avec* n *constantes arbitraires* C,

$$(6)\qquad x = C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n, \qquad y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n, \ldots$$

Prouvons d'abord l'existence de n solutions indépendantes.

Si, par impossible, on ne pouvait trouver que $p < n$ solutions indépendantes $(x_1, y_1, \ldots), \ldots (x_p, y_p, \ldots)$, toute intégrale $x, y, \ldots$ du système devrait annuler les déterminants d'ordre $p + 1$, tels que

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ y & y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Les relations ainsi obtenues ne seraient pas toutes identiquement satisfaites, car, parmi les mineurs relatifs aux éléments $x.\ y, \ldots$, il y a au moins un déterminant d'ordre p qui n'est pas nul par hypothèse. Donc les intégrales générales $x, y, \ldots$ seraient liées par une relation au moins et leurs valeurs initiales ne seraient pas arbitraires, ce qui est inexact.

Donc il existe n solutions indépendantes, avec lesquelles on peut former les expressions (6). Ces expressions sont des intégrales par le théorème I. De plus, ce sont les intégrales générales, car les équations (6) forment un système résoluble par rapport aux lettres C (le déterminant du système n'étant pas nul). On peut donc disposer des constantes de manière à attribuer à $x, y, \ldots$ des valeurs initiales arbitraires (puisque les valeurs correspondantes des C s'obtiennent par la résolution du système).

Théorème III. — *Les intégrales générales d'un système avec seconds membres s'obtiennent en ajoutant respectivement aux intégrales générales* X, Y,... *du système sans seconds membres des intégrales particulières* $\xi, \eta, \ldots$ *du système complet.*

Même démonstration que pour une équation (nº 157).

Théorème IV. — *L'intégration d'un système normal de* n *équations avec seconds membres se ramène à celle du système sans seconds membres et à* n *quadratures.*

Considérons le système complet

$$(7)\qquad \begin{cases} x' + ax + by + \cdots = T, \\ y' + a_1 x + b_1 y + \cdots = T_1, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

et supposons connues les intégrales générales du système (5) :

$$(8)\qquad \begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

On peut aussi considérer, dans ces équations (**8**), x, y.... comme les intégrales du système (**7**), à condition de regarder C_1, C_2,... comme des fonctions de t définies par ces équations. Mais alors C_1, C_2,... doivent vérifier un autre système d'équations qu'on obtient en portant les valeurs (**8**) dans (**7**). Substituons ces valeurs, en observant : 1° que les C ont maintenant des dérivées par rapport à t (que nous désignerons avec des accents) et 2° que x_1, y_1,... sont des solutions des équations sans seconds membres. Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 C_1' + x_2 C_2' + \cdots = T, \\ y_1 C_1' + y_2 C_2' + \cdots = T_1, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

C'est un système de n équations résoluble par rapport aux n dérivées C'. On en tire donc les n inconnues C par n quadratures.

Théorème V. — *Si l'on connait p solutions particulières d'un système linéaire normal sans seconds membres à n inconnues ($n > p$), l'intégration du système avec ou sans seconds membres se ramène à celle d'un système linéaire normal à $n - p$ inconnues et à des quadratures.*

Pour fixer les idées, considérons un système de quatre équations

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} x' + ax + by + cz + du = T, \\ y' + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 u = T_1, \\ z' + a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = T_2, \\ u' + a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = T_3 \end{array}\right.$$

et supposons qu'on connaisse deux solutions indépendantes $(x_1, \dots u_1)$ et $(x_2, \dots u_2)$ du système sans seconds membres.

Pour intégrer le système (**9**), désignons par C_1, C_2, ζ, υ de nouvelles inconnues et faisons le substitution

$$\left\{\begin{array}{l} x = C_1x_1 + C_2x_2, \\ y = C_1y_1 + C_2y_2, \\ z = C_1z_1 + C_2z_2 + \zeta, \\ u = C_1u_1 + C_2u_2 + \upsilon. \end{array}\right.$$

Le système (**9**) se transformera dans le suivant, où les accents désignent toujours des dérivées par rapport à t,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1C_1' + x_2C_2' + c\zeta + d\upsilon = T, \\ y_1 C_1' + y_2C_2' + c_1\upsilon + d_1\upsilon = T_1, \\ z_1 C_1' + z_2C_2' + \zeta' + c_2\zeta + d_2\upsilon = T_2. \\ y_1 C_1' + u_2C_2' + \upsilon' + c_3\zeta + d_3\upsilon = T_3. \end{array}\right.$$

Comme le déterminant $x_1y_2 - x_2y_1$ diffère de 0 par hypothèse, on peut résoudre les deux premières équations par rapport à C_1' et à C_2' et

porter les valeurs trouvées dans les deux équations suivantes. Le système est ramené à la forme normale

$$C_1' = A\zeta + B\upsilon + \tau, \qquad \zeta' + A_2\zeta + B_2\upsilon = \tau_2,$$
$$C_2' = A_1\zeta + B_1\upsilon + \tau_1, \qquad \upsilon' + A_3\zeta + B_3\upsilon = \tau_3,$$

Donc ζ et υ se déterminent par l'intégration d'un système normal à deux variables ; après quoi, C_1 et C_2 se tirent des deux premières équations par quadratures.

214. Systèmes adjoints. — Considérons les deux systèmes normaux à n inconnues

$$(10)\ \begin{cases} x' + ax + by + \cdots = 0 \\ y' + a_1x + b_1y + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (11)\ \begin{cases} -X' + aX + bY + \cdots = 0 \\ -Y' + a_1X + b_1Y + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont dans une relation réciproque et chacun d'eux s'appelle l'*adjoint* de l'autre.

Pour mettre la liaison des deux systèmes en évidence, ajoutons les équations (10) et (11) respectivement multipliées par X, Y,..., $-x, -y$,.,. Il vient, en supprimant les termes qui détruisent,

$$Xx' + Yy' + \cdots + xX' + yY' + \cdots = \frac{d}{dt}(Xx + Yy + \cdots) = 0$$

d'où

$$xX + yY + \cdots = \text{const.}$$

L'intégration complète d'un des systèmes entraîne celle de l'autre. En effet, si l'on connaît n solutions indépendantes $(x_1, y_1 \cdots)\cdots(x_n, y_n \cdots)$. On a n équations

$$(12) \qquad x_iX + y_iY + \cdots = C_i \qquad (i = 1, 2\cdots n)$$

et on en tire X, Y,... avec n constantes distinctes.

Si l'on connaissait seulement p solutions indépendantes du premier système, on aurait p relations de la forme (12) ; elles permettraient d'éliminer p des inconnues du système adjoint et de ramener, par conséquent, l'intégration de celui-ci, donc aussi l'intégration du premier système, à celle d'un système d'ordre $n - p$, mais avec seconds membres.

C'est une nouvelle démonstration du théorème V du n° précédent.

215. Remarque. — La plupart des théorèmes énoncés dans les trois premiers paragraphes et relatifs à une seule équation linéaire d'ordre n, peuvent se déduire de ceux des n[os] 213 et 214 en ramenant l'équation d'ordre n à un système d'équations du premier ordre. Il en résulte de nouvelles démonstrations de ces théorèmes que nous proposons comme un excellent exercice à faire.

CHAPITRE V.

Equations aux dérivées partielles et aux différentielles totales.

---

§ 1. Formation d'équations aux dérivées partielles.

216. Définition. — On appelle équation aux dérivées partielles toute relation entre une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables indépendantes, leurs dérivées partielles du premier ordre ou d'un ordre plus élevé et enfin les variables elles-mêmes. Lorsque les dérivées qui figurent dans l'équation sont toutes du premier ordre, l'équation est dite du premier ordre. Pour nous faire une idée de l'origine de ces équations et, par suite, de la nature des fonctions qu'elles peuvent définir, nous allons d'abord rechercher les équations aux dérivées partielles de certaines surfaces.

217. Equation des surfaces cylindriques. — Une surface cylindrique est engendrée par une droite indéfinie MN, appelée génératrice, qui se meut parallèlement à une droite donnée, en s'appuyant constamment sur une ligne donnée AB, appelée directrice.

Soient

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de la génératrice MN ; a et b sont des coefficients constants qui expriment que MN est toujours parallèle à la direction donnée ; α et β, des paramètres variables avec la position de la génératrice, mais liés par une relation qui exprime que MN rencontre AB.

En effet, soient

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$

les équations de la directrice AB ; on exprimera que AB et MN se rencontrent en éliminant x, y, z entre (1) et (2), ce qui donnera une relation

$$(3) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \Phi(\alpha).$$

Pour obtenir l'équation du lieu de MN, il faut éliminer les paramètres α et β entre (1) et (3), ce qui donne

$$(4) \qquad y - bz = \Phi(x - az).$$

Cette équation, dans laquelle Φ désigne une fonction arbitraire, convient donc à toutes les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à une même droite donnée, quelle que soit la directrice. C'est l'équation en quantités finies des surfaces cylindriques.

Nous allons montrer que l'équation (4) est équivalente à une équation aux dérivées partielles qui ne renferme plus rien d'arbitraire. Pour cela, dérivons (4) par rapport à x puis par rapport à y, en considérant z comme une fonction des deux variables indépendantes x et y, ayant pour dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = q$; on aura

$$-bp = \Phi'(x - az)(1 - ap), \qquad 1 - bq = \Phi'(x - az)(-aq),$$

et, en éliminant Φ',

$$(5) \qquad ap + bq = 1.$$

Cette équation, qui ne dépend plus de la fonction arbitraire Φ et qui a au moins la même généralité que l'équation (4), est l'équation aux dérivées partielles des surfaces cylindriques, dont les génératrices ont une direction donnée. Elle exprime une propriété géométrique de ces surfaces, savoir que la normale au point (x, y, z) est perpendiculaire à la génératrice qui passe par ce point. En effet, les cosinus directeurs de ces deux droites sont respectivement proportionnels à a, b, 1 et p, q, -1.

L'équation (5) est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. Nous exposerons dans un prochain paragraphe la méthode d'intégration de ces équations et nous prouverons alors que réciproquement toute surface dont l'ordonnée vérifie l'équation (5) est une surface cylindrique.

218. Equation des surfaces coniques. — Une surface conique est engendrée par une droite indéfinie MN, appelée génératrice, qui passe par un point fixe (a, b, c) appelé sommet, et qui s'appuie constamment sur une courbe donnée AB, appelée directrice.

Soient

$$(1) \qquad x - a = \alpha(z - c), \qquad y - b = \beta(z - c)$$

les équations d'une génératrice, α et β étant des paramètres variables

avec la position de cette droite. On exprime que la génératrice rencontre la directrice en éliminant x, y, z entre les équations de la génératrice et celles de la directrice, ce qui donne une relation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \Phi(\alpha).$$

On trouve l'équation du lieu en éliminant α, β entre (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{y-b}{z-c} = \Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Cette équation, dans laquelle Φ reste arbitraire, convient à toutes les surfaces coniques ayant pour sommet le point (a, b, c). Pour trouver l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces, dérivons successivement (3) par rapport à x et à y, en regardant z comme une fonction de ces deux variables, il viendra

$$\frac{-(y-b)p}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{z-c-p(x-a)}{(z-c)^2},$$

$$\frac{z-c-q(y-b)}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{-(x-a)q}{(z-c)^2}.$$

et, en éliminant Φ',

$$(4) \qquad (x-a)p + (y-b)q = (z-c).$$

Cette équation, qui ne renferme plus rien d'arbitraire, a la même généralité au moins que l'équation (3). C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques. Elle exprime une propriété géométrique de ces surfaces, savoir que la normale au point (x, y, z) est perpendiculaire à la génératrice qui passe par ce point et dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $(x-a)$, $(y-b)$ et $(z-c)$. Nous prouverons plus loin que réciproquement toute surface dont l'ordonnée vérifie l'équation (4) est une surface conique.

219. Equation des surfaces conoïdes. — Une surface conoïde est engendrée par une génératrice rectiligne qui se meut parallèlement à un plan directeur donné, en rencontrant constamment une droite fixe et une courbe fixe, appelées *directrices* de la surface.

Prenons un plan parallèle au plan directeur pour plan des xy et la directrice rectiligne pour axe des z. Dans ce cas, les équations d'une génératrice seront de la forme

$$(1) \qquad z = \alpha, \qquad y = \beta x,$$

où α et β sont des paramètres variables avec la génératrice. Les

équations (1) sont celles d'une droite rencontrant l'axe des z, mais il reste à exprimer qu'elle rencontre aussi la directrice curviligne. Pour cela, on élimine x, y, z entre les équations (1) et celles de la directrice curviligne, ce qui donne une relation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \Phi(\beta).$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant α et β entre (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette équation, où Φ est arbitraire, est celle de toutes les surfaces conoïdes ayant même plan directeur et même directrice rectiligne. Pour trouver l'équation aux dérivées partielles correspondante, on différentie successivement (3) par rapport à x et à y, ce qui donne

$$p = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad q = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

d'où

$$(4) \qquad px + qy = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles du premier ordre a donc la même généralité au moins que l'équation (3). Nous démontrerons plus loin qu'elle lui est équivalente. C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces conoïdes.

220. Equation des surfaces de révolution. — Celles-ci sont engendrées en faisant tourner une courbe AB, appelée génératrice, autour d'une droite fixe OR.

Prenons l'origine O sur l'*axe de révolution* OR. Chaque point M de la génératrice AB décrit une circonférence dont le centre est sur OR et dont le plan est normal à cet axe : on peut considérer la surface comme le lieu de ces circonférences.

Soient

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

les équations de l'axe OR ; un plan normal à cet axe aura pour équation

$$ax + by + cz = \alpha.$$

Les équations du cercle variable seront donc

$$(2) \qquad ax + by + cz = \alpha, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \beta,$$

car on peut le considérer comme l'intersection du plan normal à OR avec une sphère de centre O. Pour exprimer que ce cercle rencontre AB, il faut éliminer x, y, z entre les équations (2) et celles de AB, ce qui conduit à une relation

$$(3) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \Phi(\beta).$$

On obtient l'équation de la surface de révolution en éliminant α et β entre (2) et (3), ce qui donne

$$(4) \qquad ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2).$$

C'est l'équation générale, en quantités finies, des surfaces de révolution autour de la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; la fonction Φ reste arbitraire avec le choix de la directrice.

Pour obtenir l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces, on dérive successivement par rapport à x et à y, en considérant z comme une fonction. On trouve

$$a + cp = \Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(2x + 2zp),$$
$$b + cq = \Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(2y + 2zq),$$

et en éliminant Φ',

$$(5) \qquad (cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée, et la fonction arbitraire a disparu.

221 Remarque. — Si l'on intègre les équations aux dérivées partielles des surfaces précédentes, cette intégration devra donc réintroduire la fonction arbitraire que nous avons éliminée. On peut prévoir, d'après cela, que l'intégration des équations aux dérivées partielles aura pour effet d'introduire des fonctions arbitraires. Les théories que nous allons exposer vont confirmer cette prévision.

§ 2. Propriétés des déterminants fonctionnels.

222. Définition. — Soient $u_1, u_2, \dots u_n$ des fonctions du même nombre n de variables indépendantes $x_1, x_2, \dots x_n$. On donne, comme on le sait, le nom de *déterminant fonctionnel* ou de *jacobien* (n° 15) au déterminant

$$J = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Nous supposerons, dans le paragraphe actuel, que toutes ces dérivées partielles sont continues et nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

223. Théorème I. — *Si l'une des fonctions u ci-dessus est constante, ou s'il existe une relation identique entre deux ou plusieurs de ces fonctions, le déterminant fonctionnel* J *est identiquement nul.*

1° Si l'une des fonctions u est constante, tous les éléments de la ligne correspondante dans J seront nuls, donc $J = 0$.

2° S'il existe une relation entre plusieurs fonctions u, par exemple si u_1 est fonction de u_2, u_3, ..., on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \cdots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots, \dots$$

Donc les éléments de la première ligne de J s'obtiennent en faisant la somme des éléments correspondants de la seconde ligne multipliés par $\frac{\partial u_1}{\partial u_2}$, de la troisième multipliés par $\frac{\partial u_1}{\partial u_3}$, ... et le déterminant est identiquement nul.

224. Théorème II. — *Considérons m fonctions $u_1, u_2, \cdots u_m$ de n ($n \geqslant m$) variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$. Si le déterminant d'ordre p ($p < m$)*

$$(1) \qquad J_1 = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p)}{d(x_1, x_2, \cdots x_p)}$$

est différent de 0, *tandis que tous les déterminants d'ordre $p+1$ suivants :*

$$(2) \qquad J_{k,l} = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p, u_{p+k})}{d(x_1, x_2, \cdots x_p, x_l)} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2, \cdots m - p \\ l = p+1, p+2, \cdots n \end{array} \right.$$

sont identiquement nuls, les fonctions $u_1, u_2, \cdots u_p$ sont indépendantes et les fonctions restantes $u_{p+1}, u_{p+2}, \cdots u_m$ peuvent s'exprimer au moyen des premières.

L'indépendance des fonctions $u_1, u_2, \cdots u_p$ se vérifie immédiatement, car, s'il existait une relation entre elles, elle subsisterait quand on ne fait varier que $x_1, x_2, \cdots x_p$, et J_1 serait nul en vertu du théorème précédent. Mais la seconde partie du théorème exige quelques préliminaires.

Observons d'abord que les déterminants $J_{k,l}$, qui sont nuls par hypothèse quand $l = p + 1, p + 2, \cdots n$, sont nuls aussi pour les autres valeurs plus petites de l'indice l, car ils ont alors deux lignes égales.

Développons $J_{k,l}$ suivant les éléments de la dernière colonne, il vient, pour $l = 1, 2, \cdots n$,

$$J_{k,l} = A_k \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + B_k \frac{\partial u_2}{\partial x_l} + \cdots + P_k \frac{\partial u_p}{\partial x_l} + J_1 \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} = 0$$

et il est essentiel d'observer que les mineurs A_k, B_k, $\cdots$ P_k dépendent de l'indice k seulement et non de l.

Ceci posé, considérons les $p + 1$ équations qui déterminent du_1, du_2, $\cdots$ du_p et une différentielle totale de plus du_l :

$$du_1 = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} dx_l, \quad \cdots \quad du_p = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial x_l} dx_l, \quad du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} dx_l ;$$

ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par les mineurs A_k, $\cdots$ P_k et J_1. Il viendra, $J_{k,l}$ étant nul,

$$A_k du_1 + B_k du_2 + \cdots + J_1 du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} J_{k,l}\, dx_l = 0.$$

Cette relation conduit aisément à la démonstration du théorème.

Associons aux fonctions indépendantes u_1, $\cdots$ u_p de nouvelles fonctions v_{p+1}, v_{p+2}, $\cdots$ v_n, de manière à former un système de n fonctions indépendantes et prenons celles-ci comme variables indépendantes au lieu des x. On tire de la relation précédente, J_1 n'étant pas nul,

$$du_{p+k} = -\frac{A_k du_1 + B_k du_2 + \cdots + P_k du_p}{J_1}$$

et cette relation entre différentielles premières, étant indépendante du choix des variables (t. 1er, n° 126), subsiste pour les variables indépendantes u_1, $\cdots$ u_p, v_{p+1}, $\cdots$ v_n. Donc, si on la compare à l'expression générale de du_{p+k}, qui est

$$\frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_p} du_p + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+1}} dv_{p+1} + \cdots + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_n} dv_n ,$$

on en tire

$$\frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+1}} = \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+2}} = \cdots = 0.$$

Donc u_{p+k} ne dépend que de u_1, u_2, $\cdots$ u_p. On voit pareillement que, si un ou plusieurs des coefficients A_k, B_k, $\cdots$, étaient nuls, u_{p+k} ne dépendrait même plus que d'une partie de ces fonctions.

225. Remarques. — I. Dans la démonstration précédente, on peut prendre, en particulier, x_{p+1}, x_{p+2}, $\cdots x_n$ comme variables v, car le déterminant

$$\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p, x_{p+1}, \cdots x_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_p, x_{p+1}, \cdots x_n)} = \frac{d(u_1, \cdots u_p)}{d(x_1, \cdots x_p)}$$

n'étant pas nul, les variables $u_1, \cdots u_p, x_{p+1}, \cdots x_n$ sont indépendantes.

II. Sous les conditions du théorème précédent, $p+1$ quelconques des fonctions $u_1, \cdots u_m$ n'étant pas indépendantes, leur déterminant fonctionnel par rapport à $p+1$ quelconques des variables x est identiquement nul. Il est à remarquer que les déterminants $J_{k,l}$, énumérés dans l'énoncé du théorème II, ne sont qu'une partie des déterminants qu'on peut ainsi former. Donc la nullité de ceux-ci entraîne celle des autres.

226. Théorème III. — *Soient m fonctions $u_1, u_2, \cdots u_m$ d'un nombre égal ou supérieur n de variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$; la condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions soient indépendantes entre elles, c'est-à-dire pour qu'aucune ne soit constante et qu'elles ne satisfassent pas à une relation indépendante des variables x, est que l'un au moins des déterminants fonctionnels qu'on peut former avec m colonnes du tableau :*

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

ne soit pas identiquement nul. En particulier, si les u et les x sont en même nombre n, cette condition sera que le déterminant fonctionnel J *des n fonctions u par rapport aux n variables x, ne soit pas identiquement nul.*

Considérons les déterminants de tous les ordres depuis 1 jusque m qu'on peut former en combinant un même nombre de lignes et de colonnes du tableau précédent.

1° S'ils sont tous nuls, même ceux de l'ordre 1 qui se réduisent à un seul élément, toutes les dérivées partielles des u sont nulles et les u sont des constantes.

2° Dans le cas contraire, soit p $(p \geqslant 1)$ l'ordre maximum des déterminants différents de 0. Si p est $< m$, nous pouvons désigner par u_1, $u_2 \cdots u_p$ (puisque la numérotation est arbitraire) les fonctions qui entrent

dans ce déterminant différent de 0, alors, tous les déterminants d'ordre $p+1$ étant nuls, les autres fonctions u dépendent des précédentes (théorème II). Donc, pour que les u soient indépendants, il faut que $p = m$.

D'ailleurs cette condition est suffisante en vertu du théorème I, car, s'il y avait une relation entre $u_1, \cdots u_m$, elle subsisterait en ne faisant varier que m quelconques des variables x et le déterminant fonctionnel correspondant serait nul.

§ 3. Equations linéaires aux dérivées partielles.

227. Remarque préliminaire. — Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, on a surtout en vue de ramener leur intégration à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires. Le problème ainsi posé est complètement résolu pour les équations du 1er ordre, mais nous nous occuperons seulement ici des équations linéaires dont la théorie est la plus simple.

228. Théorie des équations linéaires et homogènes. — Considérons d'abord l'équation *linéaire et homogène*

$$(1) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

dans laquelle $X_1, X_2, \cdots X_n$ sont des fonctions données et z une fonction inconnue des n variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$. On suppose que la fonction inconnue z n'entre pas dans les coefficients X et qu'un au moins de ces coefficients n'est pas identiquement nul. Nous admettrons que c'est X_1.

Posons le système d'*équations différentielles ordinaires*

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

et considérons un domaine dans lequel les rapports $X_2 : X_1, X_3 : X_1, \cdots$ et leurs dérivées partielles restent continues. Prenons x_1 comme variable indépendante ; les équations (2) admettent un système de solutions dépendant de $n-1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ et de la forme (n° 120, 2°)

$$x_2 = \varphi_2(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n), \quad x_3 = \varphi_3(x_1, \alpha_1, \cdots), \quad \cdots \quad x_n = \varphi_n(x_1, \alpha_1, \cdots).$$

Résolvons ce système d'équations par rapport aux constantes arbitraires ; il viendra

$$(3) \qquad u_1 = \alpha_1, \quad u_2 = \alpha_2, \quad \cdots \quad u_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

en désignant par u_1, $u_2, \cdots u_{n-1}$ des fonctions connues de $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Nous allons établir que de la connaissance de ces fonctions on peut immédiatement déduire toutes les intégrales de l'équation (1) et que l'intégration du système (2) ou de l'équation (1) sont deux problèmes complètement équivalents.

Nous commencerons par donner une définition qui facilite le langage :

Définition. — En vertu des formules (3), chacune des fonctions u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$ demeure constante quand $x_1, x_2, \ldots x_n$ varient de manière à vérifier les équations (2). Une fonction qui ne se réduit pas identiquement à une constante et qui possède ces propriétés s'appelle *une intégrale* des équations (2). Deux intégrales sont *distinctes* quand il n'existe pas de relation entre elles. Donc, quand on a intégré les équations (2), on connaît $n - 1$ intégrales distinctes $u_1, u_2, \ldots$ de ces équations, car, comme on peut les égaler respectivement à autant de constantes arbitraires distinctes, il ne peut exister de relations entre elles.

Théorème I. — *Toute intégrale du système* (2) *dans le sens précédent est une intégrale de l'équation* (1).

En effet, soit u une intégrale de (2) ; quand les x vérifient les équations (2), on a, par définition,

$$(4) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0 ;$$

d'où, en éliminant les dx,

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2 + \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n} X_n = 0.$$

Cette équation est *identique*, car elle a lieu pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ vérifiant les équations (2), donc pour un système de valeurs particulieres quelconques, car celui-ci peut être choisi comme système de valeurs initiales. Donc u est une intégrale de (1).

Théorème II. — *Réciproquement, toute intégrale de l'équation* (1) *est une intégrale du système* (2).

En effet, soit u une intégrale de (1) ; elle vérifie l'équation (5) ; si les x varient conformément aux équations (2), on peut remplacer dans (5) les X par des quantités proportionnelles dx et on obtient l'équation (4). Donc, du étant nul, u demeure constant et c'est une intégrale du système (2).

Théorème III. — *L'équation* (1) *ou le système* (**2**) *admettent* $n - 1$ *intégrales distinctes* $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$; *toutes les autres intégrales sont fonctions des précédentes et toute fonction* $\varphi(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$ *est réciproquement une intégrale.*

En effet, soient $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ les $n - 1$ intégrales distinctes obtenues par l'intégration du système (**2**). Ajoutons leur une nouvelle intégrale quelconque u_n ; nous aurons n identités

$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

d'où, en éliminant les X (qui ne sont pas tous nuls),

$$\frac{d(u_1, u_2, \dots u_n)}{d)x_1, x_2, \dots x_n)} = 0.$$

Cette identité prouve (nº 226) qu'il existe une relation au moins entre les u ; mais, comme il n'y en a pas entre $u_1, \dots u_{n-1}$, il vient nécessairement

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \dots u_{n-1}).$$

Réciproquement, toute expression de cette forme, demeurant constante avec $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, est une intégrale du système (**2**), donc de l'équation (**1**).

Il résulte de là que, si l'on a intégré le système (**2**), on connaît l'intégrale générale de (**1**).

La réciproque est vraie. Si l'on connaît l'intégrale générale de (**1**), on en connaît ($n - 1$) intégrales distinctes. En égalant celles-ci à des constantes arbitraires, on aura intégré le système (**2**).

De là, la règle suivante pour intégrer l'équation (**1**) :

Règle. — *Pour intégrer l'équation* (**1**), *on pose le système auxiliaire* (**2**), *qui est un système d'équations différentielles ordinaires. En l'intégrant, on obtient* $n - 1$ *relations qu'on résout par rapport aux* $n - 1$ *constantes d'intégration. Les* $n - 1$ *fonctions* $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ *qui demeurent constantes sont des intégrales de l'équation* (**1**) *et l'intégrale générale sera*

$$z = \varphi(u_1, u_2, \dots u_{n-1}),$$

la fonction φ *restant arbitraire. Il n'y a pas d'autre solution.*

Comme *application*, intégrons l'équation des conoïdes $px + qy = 0$.

Il faut d'abord intégrer l'équation auxiliaire

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y}{x} = \alpha.$$

L'intégrale générale cherchée sera $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. C'est l'équation des conoïdes en quantités finies (n° 220).

229. Théorie des multiplicateurs des équations homogènes. — Définition. — Représentons, en abrégé, par $R = 0$ le premier membre de l'équation (1). Jacobi appelle *multiplicateur* de l'équation $R = 0$, ou multiplicateur de R, un facteur M, fonction de $x_1, x_2, \cdots x_n$, tel que le produit MR puisse se mettre sous la forme d'un déterminant fonctionnel

$$MR = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2 \cdots x_n)}$$

les $n - 1$ fonctions u étant connues.

Théorème I. — *Toute équation linéaire et homogène* $R = 0$ *de la forme* (1) *admet un multiplicateur* M.

En effet, soient $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ un système de $n - 1$ intégrales distinctes de l'équation $R = 0$. Comme X_1 n'est pas nul et que, par suite, x_1 n'est pas une intégrale de $R = 0$ (R se réduisant à X_1 pour $z = x_1$), les fonctions $x_1, u_1, \cdots u_{n-1}$ sont indépendantes, par conséquent, le déterminant δ_1 suivant

$$\delta_1 = \frac{d(x_1, u_1, u_2 \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)} = \frac{d(u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_2, \cdots x_n)}$$

n'est pas identiquement nul.

Considérons le système de n identités, linéaires en $X_1, X_2, \cdots X_n$,

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R,$$

$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

dont la première sert de définition à R et les autres expriment que les u sont des intégrales. Multiplions-les respectivement par les mineurs $\delta_1, \delta_2, \cdots$ relatifs aux éléments de la première colonne du déterminant du système, qui n'est autre que le déterminant fonctionnel

$$\frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)},$$

et ajoutons. Il vient identiquement

$$X_1 \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)} = R\delta_1.$$

Comme d'ailleurs δ_1 n'est pas nul, le déterminant fonctionnel ne peut être identiquement nul non plus. On voit donc que $M = \delta_1 : X_1$ qui ne contient pas z est un multiplicateur de R.

Théorème II. — *Si l'expression*

$$R = X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

est elle-même un déterminant fonctionnel

$$\frac{d(z, u_1, u_2 \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)},$$

on aura identiquement

$$(6) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

On a, en effet,

$$X_1 = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_2, x_3 \cdots x_n)}, \quad X_2 = -\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_3, \cdots x_n)}, \cdots$$

Donc l'expression (6) est linéaire par rapport aux dérivées secondes des fonctions u. Je dis que chacune de ces dérivées a pour coefficient zéro : il suffit de l'établir pour l'une d'elles, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ par exemple. Celle-ci ne se trouvera que dans les deux premiers termes de (6), savoir

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{d(u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_3, \cdots x_n)} + \cdots\right]$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{d(u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_3, \cdots x_n)} + \cdots\right]$$

Donc les deux coefficients de $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ se détruisent.

Théorème III. — *Réciproquement, si l'on a identiquement*

$$(6) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

R *est un déterminant fonctionnel.*

En effet, soit M le multiplicateur de R obtenu dans la démonstration du théorème I ; MR sera le déterminant fonctionnel

$$\text{(7)} \qquad MR = \frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)}$$

considéré dans cette même démonstration ; et l'on aura, en vertu du théorème II,

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Mais cette identité se réduit, en vertu de (6), à la relation

$$X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial M}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0.$$

Donc, M étant une intégrale de R = 0, on peut poser

$$M = \varphi(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})$$

Déterminons par une quadrature U_{n-1} en fonction de $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$, par la relation

$$\frac{\partial U_{n-1}}{\partial u_{n-1}} = \frac{1}{M} = \frac{1}{\varphi(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})},$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-2} U_{n-1})}{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-2} u_{n-1})} = \frac{1}{M};$$

la relation (7) donnera, par les propriétés des jacobiens (n° 15),

$$R = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, U_{n-1})}{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, u_{n-1})} \frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)}$$

$$R = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, U_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n)}.$$

Donc R est un déterminant fonctionnel.

Les théorèmes II et III conduisent à la conclusion suivante :

Théorème IV. — *Les multiplicateurs de* R = 0 *sont les intégrales de*

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Théorème V. — *Si l'on connaît un multiplicateur* μ *de* R = 0, *on obtient tous les autres en multipliant* μ *par l'intégrale générale z de* R = 0.

En effet, si l'on substitue $M = \mu z$ dans l'équation précédente, qui est celle des multiplicateurs, il vient, pour déterminer z,

$$z\left[\frac{\partial \mu X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu X_2}{\partial x_2} + \cdots\right] + \mu\left[X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots\right] = 0$$

et, comme le premier crochet est nul, cette équation se réduit à $R = 0$.

230. Equations aux dérivées partielles linéaires de la forme la plus générale. — Soit z une fonction inconnue de $x_1, x_2, \cdots x_n$. Désignons par $p_1, p_2, \cdots p_n$ les dérivées de z par rapport à chacune de ces variables. Soient enfin $X_1, X_2, \ldots X_n$ et Z des fonctions données de $x_1, \cdots x_n$ et z, l'une au moins X_1 des fonctions X n'étant pas identiquement nulle.

L'équation linéaire la plus générale est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n = Z$$

ou

$$Z - X_1 p_1 - X_2 p_2 - \cdots - X_n p_n = 0. \tag{8}$$

Règle d'intégration. — *Pour intégrer cette équation, on pose le système auxiliaire d'équations différentielles ordinaires*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}. \tag{9}$$

On intègre ce système, et en résolvant par rapport aux constantes arbitraires, on obtient le système de ses n intégrales distinctes :

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = \alpha_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

L'intégrale générale de l'équation (8) *est la fonction implicite z définie par la relation*

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) = 0,$$

F *désignant une fonction arbitraire. Exceptionnellement, il peut y avoir une solution singulière ne rentrant pas dans la précédente, mais ne contenant rien d'arbitraire.*

Démonstration. — Nous allons établir ce théorème en suivant, sauf quelques modifications, la méthode de Gilbert, qui ne laisse échapper aucune solution. Elle consiste à mettre le premier membre de l'équation (8) sous forme de déterminant fonctionnel.

Désignons, en abrégé, par R le premier membre de l'équation (8) et considérons le système d'identités, linéaires en $X_1, X_2, \cdots X_n, Z$:

$$(10) \quad \begin{cases} R = Z - X_1 p_1 - X_2 p_2 - \cdots - X_n p_n \\ 0 = Z \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial z} + X_1 \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} + \cdots + X_n \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}, \\ \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

dont la première sert de définition à R et les suivantes expriment que les φ sont des intégrales de (9). Le déterminant Δ de ce système n'est pas identiquement nul, car, si on le développe par rapport aux éléments de la première ligne, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -p_1 & \cdots & -p_n \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \delta - p_1\delta_1 - p_2\delta_2 - \cdots - p_n\delta_n$$

et les mineurs $\delta, \delta_1, \cdots \delta_n$ sont des fonctions explicites de $x_1, \cdots x_n$ et z seulement, dont l'une au moins n'est pas nulle, puisque les n fonctions φ sont indépendantes (nº 226, théorème III).

D'autre part, je dis que Δ peut se mettre sous forme de déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)},$$

à condition de calculer les dérivées partielles des φ en considérant z comme fonction de $x_1, x_2, \cdots x_n$. En effet, on peut ajouter aux éléments de la deuxième colonne, puis à ceux de la troisième,... les éléments de la première multipliés par p_1, puis par p_2,... Il vient ainsi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + p_n \frac{d\varphi_1}{\partial z} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ce qui est bien un déterminant fonctionnel calculé en considérant z comme fonction des x.

Si l'on veut tirer X_1 du système (10), il faut multiplier ces équations par les mineurs de Δ relatifs aux coefficients de X_1 et ajouter. Le premier de ces mineurs étant δ_1, il vient ainsi $R\delta_1 = X_1 \Delta$. Donc δ_1 n'est pas identiquement nul, puisque X_1 et Δ ne le sont pas ; et nous avons l'identité

$$R = \left(\frac{X_1}{\delta_1}\right) \Delta = \left(\frac{X_1}{\delta_1}\right) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)}.$$

L'équation proposée $R = 0$ est donc identique, à un facteur près, à

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)} = 0.$$

Sous cette forme, elle exprime que la fonction z de $x_1, \cdots x_n$ doit être choisie de telle façon qu'il existe entre les fonctions φ une relation indépendante des variables x. Par conséquent, pour qu'une fonction z vérifie l'équation (8), il faut et il suffit qu'elle soit comprise dans la relation $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) = 0$.

Les seules solutions qui puissent échapper à cette relation doivent annuler le facteur négligé $X_1 : \delta_1$, lequel est une fonction explicite de $x_1, \cdots x_n$ et z. Donc, si l'on peut tirer une valeur de z de la relation $X_1 : \delta_1 = 0$, ce sera une solution ne contenant rien d'arbitraire. On lui donne le nom de ***solution singulière***.

Quand elle existe, la solution singulière peut se trouver sans intégration. En effet, nous venons de montrer qu'elle doit annuler tout facteur X_1 qui n'est pas identiquement nul. Par conséquent, elle doit annuler tous les coefficients $X_1, X_2 \cdots Z$ de l'équation (8) et, s'il existe une fonction z satisfaisant à cette condition, ce sera évidemment une intégrale et on la trouvera sans intégration.

231. Exemples. — I. *L'équation des surfaces cylindriques est* (n° 217)

$$ap + bq = 1.$$

Pour l'intégrer, on forme le système auxiliaire

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x - az = \alpha, \\ y - bz = \beta. \end{cases}$$

L'intégrale générale sera

$$F(x - az, y - bz) = 0.$$

II. *L'équation des surfaces coniques* est (n° 218)

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c.$$

Le système auxiliaire sera

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - a}{z - c} = \alpha, \\ \dfrac{y - b}{z - c} = \beta. \end{cases}$$

L'intégrale générale sera,

$$F\left(\frac{x - a}{z - c}, \frac{y - b}{z - c}\right) = 0.$$

III. *L'équation des surfaces de révolution* est (n° 220)

$$(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay.$$

Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

On le ramène à un système linéaire en égalant ces rapports à la différentielle dt d'une nouvelle variable. Il vient

$$dx = (cy - bz)dt, \qquad dy = (az - cx)dt, \qquad dz = (bx - ay)dt.$$

On en tire deux combinaisons immédiatement intégrables :

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0, \\ adx + bdy + cdz = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha, \\ ax + by + cz = \beta. \end{cases}$$

C'est le système des intégrales du système auxiliaire, résolu par rapport aux deux constantes. L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles sera

$$F(x^2 + y^2 + z^2, ax + by + cz) = 0.$$

§ 4. Equations aux différentielles totales entre trois variables.

232. Intégrabilité complète. — Considérons l'équation

$$(1) \qquad dz = X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy,$$

dans laquelle x et y sont des variables indépendantes, z une fonction inconnue de ces deux variables, enfin X et Y des fonctions données de x, y et z, admettant des dérivées partielles par rapport à chacune de ces variables.

L'équation (1) est une *équation aux différentielles totales*. On dit qu'elle est *complètement intégrable*, si elle admet une intégrale renfermant une constante arbitraire, en d'autres termes, s'il existe une relation unique

$$(2) \qquad z = \varphi(x, y, \alpha),$$

renfermant une arbitraire α, dont l'équation (1) soit la conséquence.

233. Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit complètement intégrable est que l'on ait, identiquement* (x, y *et* z *restant donc arbitraires*),

$$(3) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Pour montrer que cette condition est nécessaire, substituons la valeur (2) de z dans l'équation (1); le second membre deviendra une différentielle totale exacte à deux variables x et y. Donc on aura, pour tout système de valeurs x et y, l'identité

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Mais $\varphi(x, y, \alpha)$, étant une intégrale de (1) par hypothèse, ses deux dérivées partielles sont $X(x, y, \varphi)$ et $Y(x, y, \varphi)$. Donc la relation (3) est identiquement satisfaite pour tout système x, y quand on y remplace z par $\varphi(x, y, \alpha)$. On en conclut qu'elle est identique avant cette substitution, c'est-à-dire qu'elle a lieu pour tout système de valeurs de x, y, z, car, x et y étant donnés, on peut disposer de l'arbitraire α de manière à donner à φ (donc à z) une valeur arbitraire. Donc la condition (3) est nécessaire.

Cette condition est aussi suffisante, car, si elle a lieu, le théorème suivant prouve qu'il existe une intégrale renfermant une constante arbitraire :

234. **Théorème II**. — *Supposons que l'identité* (3) *ait lieu et soit* x_0, y_0, z_0 *un système de valeurs initiales arbitraires des variables ; si les dérivées partielles* $\frac{\partial X}{\partial z}$ *et* $\frac{\partial Y}{\partial z}$ *sont continues aux environs de ces valeurs, l'équation* (1) *admet une intégrale* $z = \varphi(x, y)$ *et une seule se réduisant à* z_0 *au point* (x_0, y_0).

Nous allons montrer, en effet, que cette intégrale peut s'obtenir par l'intégration consécutive des deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dz}{dx} = X, \qquad \frac{dz}{dy} = Y,$$

y dans la première et x dans la seconde étant considérés comme des paramètres.

Intégrons d'abord l'équation entre ζ et x.

$$\frac{d\zeta}{dx} = X(x, y_0, \zeta) \tag{4}$$

et déterminons son intégrale $\zeta = \varphi(x, y_0)$ qui se réduit à z_0 pour $x = x_0$. Comme $\frac{\partial X}{\partial z}$ est continue, cette intégrale existe et est unique.

Intégrons ensuite l'équation entre z et y (x étant considéré comme un paramètre)

$$\frac{dz}{dy} = Y(x, y, z) \tag{5}$$

et déterminons son intégrale $z = \varphi(x, y)$ qui se réduit à ζ pour $y = y_0$. Comme $\frac{\partial Y}{\partial z}$ est continue, cette intégrale est aussi déterminée et unique.

Je dis que $z = \varphi(x, y)$ est l'intégrale cherchée de l'équation (1).

En effet, $\varphi(x, y)$ se réduit à ζ pour $y = y_0$ et, par suite, à z_0 au point (x_0, y_0). D'autre part, puisque $\varphi(x, y)$ est une intégrale de (5), on a déjà

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = Y(x, y, \varphi). \tag{6}$$

Il reste donc seulement à montrer que l'on a aussi, quand x seul varie,

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = X(x, y, \varphi).$$

Cette relation a lieu pour $y = y_0$, car elle se réduit alors à l'équation (4). Pour établir qu'elle subsiste pour les autres valeurs de y, il suffira donc de montrer que, si l'on pose

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \mathrm{X}(x, y, \varphi) + u,$$

la fonction u, qui est nulle pour $y = y_0$, reste nulle quand y varie.

A cet effet, calculons sa dérivée par rapport à y ; on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Remplaçons $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ par sa valeur (6), et observons que, par (7),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}(\mathrm{X} + u) ;$$

il vient, par l'identité (3),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}(\mathrm{X} + u) - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\mathrm{Y} = u\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}.$$

Donc u, considérée comme fonction de y, vérifie l'équation linéaire $\frac{du}{dy} = u\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}$ et s'annule pour $y = y_0$. Mais $u = 0$ est une intégrale particulière satisfaisant à cette condition initiale ; et il ne peut y en avoir qu'une, puisque $\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}$ est continue ; donc u est constamment nulle, C. Q. F. D.

Réciproquement, toute intégrale de (1) ayant pour valeur initiale z_0 doit satisfaire aux équations (4) et (5) (conditions initiales comprises) et, par conséquent, cette intégrale est unique.

Remarque. — On conclut de là que l'intégrale générale de (1) doit dépendre d'une constante arbitraire permettant d'attribuer à z la valeur arbitraire z_0 au point x_0, y_0.

235. Théorème et méthode d'intégration de Mayer. — *Quand l'équation* (1) *est complètement intégrable, son intégration dépend de celle d'une seule équation différentielle ordinaire renfermant un paramètre arbitraire.*

Soit z_0 la valeur arbitraire de z au point x_0, y_0, les conditions de continuité étant supposées satisfaites dans le voisinage de ces valeurs initiales : l'intégrale sera complètement déterminée en un point quel-

conque x, y par sa valeur initiale z_0. Donc, pour en trouver la valeur, il suffit de faire varier x, y en ligne droite depuis l'origine jusqu'en ce point.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que l'on choisisse l'origine comme point initial dans le plan x, y. Il suffit d'ailleurs, pour ramener le cas général au précédent, de changer x en $x_0 + x$ et y en $y_0 + y$ dans l'équation, ce qui revient à un déplacement d'axes dans le plan x, y.

Pour déterminer la valeur au point x, y de l'intégrale qui a pour valeur z_0 à l'origine, joignons donc l'origine à ce point par une droite. Le long de celle-ci, on aura, λ désignant un paramètre constant,

$$y = \lambda x$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (1),

$$(8) \qquad dz = (\mathrm{X} + \lambda \mathrm{Y})\, dx.$$

Il suffit d'intégrer cette équation (8) pour en déduire l'intégrale de (1). En effet, soit

$$\mathrm{F}(x, z, \lambda) = \text{const.}$$

l'intégrale générale de (8) résolue par rapport à la constante d'intégration ; l'intégrale particulière z de valeur initiale z_0 est la fonction implicite définie par l'équation

$$\mathrm{F}(x, z, \lambda) = \mathrm{F}(0, z_0, \lambda).$$

Sa valeur au point x, y se tire de cette relation en remplaçant λ par $y : x$. On obtient ainsi l'intégrale de l'équation (1) : ce sera

$$(9) \qquad \mathrm{F}\left(x, z, \frac{y}{x}\right) = \mathrm{F}\left(0, z_0, \frac{y}{x}\right)$$

et elle dépend d'une constante arbitraire z_0.

Remarque. — En principe, la méthode de Mayer ne fournit l'intégrale de valeur initiale z_0 que dans un domaine où les conditions de continuité supposées dans les théorèmes précédents se vérifient. Mais, dans la plupart des cas pratiques, les calculs conduisent à définir l'intégrale par une équation entre des expressions littérales qui se dérivent toujours par les mêmes règles, de sorte que la formule démontrée dans un domaine restreint subsiste d'elle-même dans un

domaine quelconque. Toutefois cette remarque ne peut être présentée avec toute la précision, qu'elle comporte qu'en s'appuyant sur les propriétés générales des fonctions analytiques, qui ne seront exposées que plus tard.

Dans les applications que l'on rencontre, le plus simple sera généralement de choisir l'origine $x_0 = y_0 = 0$ comme point initial dans le plan x, y Mais on ne le peut pas toujours, parce que les conditions de continuité peuvent tomber en défaut en ce point. On fait alors le changement d'axes préalable indiqué dans la démonstration précédente.

Exemple. — Soit l'équation

$$dz = \frac{2\,xz\,dx + 2\,y\,z^2dy}{1 - x^2 - 2\,y^2z}$$

Elle satisfait à la condition d'intégrabilité complète et aussi aux conditions de continuité aux environs de $x = y = 0$. Cherchons l'intégrale z qui a pour valeur z_0 à l'origine.

Posons $y = \lambda x$, $dy = \lambda\,dx$ et chassons le dénominateur, il vient

$$dz\,(1 - x^2) - 2\,xz\,dx = 2\,\lambda^2\,(x^2z\,dz + xz^2\,dx)$$

Les deux membres sont des différentielles exactes, l'intégrale de cette équation différentielle ordinaire sera

$$z\,(1 - x^2) - \lambda^2x^2z^2 = \text{const.} = z_0$$

et celle de l'équation aux différentielles totales

$$z\,(1 - x^2) - y^2z^2 = z_0.$$

236. Forme symétrique de l'équation. — L'équation plus symétrique

$$(10) \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

où, A, B, C sont des fonctions données de x, y, z et où C n'est pas nul, se ramène à la précédente en la résolvant par rapport à dz. La condition d'intégrabilité complète est donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{C}\right) - \frac{B}{C}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{C}\right) - \frac{A}{C}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B}{C}\right)$$

ou, tous calculs faits, et sous forme symétrique,

$$(11) \qquad A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0.$$

Quand cette identité a lieu, l'intégration de l'équation (**10**) peut se faire par la méthode de Mayer. On a d'ailleurs la liberté de résoudre à volonté par rapport à dx, dy ou dz et de considérer x, y ou z comme l'inconnue. On choisira comme inconnue celle des variables dont la détermination paraît la plus facile.

237. Multiplicateur ou facteur intégrant. — *Quand la condition d'intégrabilité complète* (**11**) *est vérifiée, il existe un facteur* μ *fonction de* x, y, z *tel que l'expression*

$$\mu\,(\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \mathrm{C}\,dz)$$

soit une différentielle totale exacte.

En effet, l'équation (**10**) admet une intégrale renfermant une constante et qui, résolue par rapport à cette constante, prend la forme

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{F}\,(x, y, z) = \alpha.$$

On en tire, en différentiant,

$$\mathrm{F}'_x\,dx + \mathrm{F}'_y\,dy + \mathrm{F}'_z\,dz = 0$$

et, en identifiant la valeur de dz qui s'en déduit avec celle fournie par l'équation (**10**),

$$\text{(13)} \qquad \frac{\mathrm{F}'_x}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{F}'_y}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{F}'_z}{\mathrm{C}}.$$

Ces relations ne contiennent plus α et elles ont lieu pour tout système de valeurs de x, y, z satisfaisant à (**12**), donc pour un système quelconque (x_0, y_0, z_0), car on peut faire $\alpha = \mathrm{F}\,(x_0, y_0, z_0)$. Ce sont donc des identités. Appelons μ la fonction de x, y, z définie par l'un de ces rapports, on aura identiquement

$$\mu\,(\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \mathrm{C}\,dz) = \mathrm{F}'_x\,dx + \mathrm{F}'_y\,dy + \mathrm{F}'_z\,dz = d\,\mathrm{F}(x, y, z),$$

ce qui prouve le théorème.

238. Solution singulière. — Quand l'équation (**10**) est complètement intégrable, elle peut admettre, en outre de l'intégrale qui renferme une constante arbitraire et qu'on appelle *l'intégrale générale*, une *solution singulière* ne renfermant rien d'arbitraire. On obtiendra d'ailleurs immédiatement cette nouvelle solution quand l'intégrale générale sera connue.

En effet, supposons connue l'intégrale (**12**); on en déduit, immédiatement un multiplicateur μ en formant l'un des rapports (**13**); il vient alors

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = \frac{1}{\mu}\,d\,F(x, y, z).$$

L'équation ne peut donc être vérifiée que de deux manières :

1° En posant $F = \alpha$: c'est la solution générale;

2° En posant $1 : \mu = 0$. Si l'on peut tirer de là une valeur de z, ce sera la solution singulière.

239. Remarque. — La méthode de Mayer est la méthode d'intégration la plus simple *au point de vue théorique*. Mais, *en pratique*, on n'a guère l'occasion de s'en servir, parce que l'on ne rencontre que des exemples très simples, pour lesquels on aperçoit facilement un multiplicateur. Dans ce cas, on obtient, immédiatement l'intégrale. Soit, par exemple, l'expression

$$2\,z\,(dx - dy) + (x - y)\,dz = 0.$$

Elle est complètement intégrable. On sépare la variable z de x et y en divisant par $z\,(x - y)$, ce qui est donc l'inverse d'un facteur intégrant. Il vient

$$\frac{2\,(dx - dy)}{x - y} + \frac{dz}{z} = 0 \qquad \text{ou} \qquad (x - y)^2 z = \alpha$$

c'est l'intégrale générale. Il y a une solution singulière $z = 0$, qui rend infini le multiplicateur $1 : z\,(x - y)$. Si l'on ne prenait pas z comme fonction inconnue, la solution singulière serait $x - y = 0$.

240. Intégrabilité incomplète. — Si l'équation

$$(14) \qquad dz = X\,dx + Y\,dy$$

ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité complète, on ne peut pas la vérifier par une fonction z des deux variables x et y qui dépende d'une constante arbitraire. Mais on le pourra peut-être par une fonction $z = \varphi\,(x, y)$ sans constante arbitraire. En vertu de la démonstration du théorème I, celle-ci doit nécessairement rendre identique la condition

$$(15) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\,Y = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\,X.$$

Donc la fonction $z = \varphi(x, y)$ se tire nécessairement de cette relation quand elle existe.

Donc, pour reconnaître s'il existe une solution et pour la trouver, il suffira de résoudre la relation (15) par rapport à z et de substituer la valeur trouvée dans l'équation (14). Si celle-ci est vérifiée, ce qui sera l'exception, la valeur trouvée sera une intégrale, mais nous dirons que l'intégrabilité de l'expression (14) est *incomplète*.

En voici un exemple : Soit l'équation différentielle

$$dz = z\,(dx + x\,dy).$$

La relation (15) est

$$xz = z + xz, \qquad \text{d'où} \qquad z = 0.$$

Or $z = 0$ satisfait à l'équation différentielle. C'est donc une intégrale et la seule.

§ 5. Equations ou systèmes d'équations aux differentielles totales à un nombre quelconque de variables.

241. Une seule équation aux différentielles totales. — Soient X_1, $X_2, \ldots X_n$ des fonctions données de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$ et d'une fonction inconnue z. Considérons l'équation

$$(1) \qquad dz = \sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$$

On dit que l'équation est *complètement intégrable* s'il existe une relation unique entre $x_1 \ldots x_n$, z, dépendant d'une constante arbitraire, dont l'équation (1) soit la conséquence.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit complètement intégrable est que l'on ait les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *identités*

$$(2) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + X_k \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial X_k}{\partial z}. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

En effet, l'équation (1) doit être complètement intégrable quand on ne fait varier que deux x_i et x_k des variables x, ce qui exige qu'on ait les identités précédentes. D'autre part, ces conditions sont suffisantes en vertu du théorème suivant :

Théorème II. — *Si les identités* (2) *ont lieu et qu'on désigne par* x_i^0, z_0

un système de valeurs initiales arbitraires des $n+1$ variables x_i et z, l'équation (1) *admet une intégrale et une seule $z = \varphi(x_1, \ldots x_n)$ se réduisant à z_0 au point $(x_1^0, \ldots x_n^0)$. On suppose les dérivées $\frac{\partial X_i}{\partial z}$ continues dans le voisinage des valeurs initiales x_i^0 et z_0*

Le théorème est vrai pour deux variables indépendantes (n°223). Supposons qu'il soit déjà démontré pour $n-1$, nous allons montrer qu'il subsiste pour n.

Pour plus de clarté, désignons la variable x_n par y et le coefficient X_n par Y. L'équation (1) prend la forme

$$(3) \qquad dz = \sum_{i=1}^{n-1} X_i \, dx_i + Y \, dy.$$

et pour $k = n$, les identités (2) sont remplacées par

$$(4) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial y} + Y \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Laissons d'abord y constant. Sous les conditions admises, il existe une intégrale ζ de l'équation

$$(5) \qquad d\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x_1, x_2, \ldots y, \zeta) \, dx_i$$

et une seule qui prend la valeur z_0 au point $(x_1^0, \ldots x_n^0)$.

Cette intégrale ayant été déterminée, faisons varier y seul, et cherchons l'intégrale unique et bien déterminée de l'équation

$$(6) \qquad \frac{dz}{dy} = Y$$

qui se réduit à ζ pour $y = y_0$. Je dis que cette intégrale $z = \varphi(x_i, y)$ sera aussi l'intégrale cherchée de l'équation (3).

En effet, cette intégrale se réduit à z_0 au point (x_i^0, y_0) et l'on a, φ étant une intégrale de (6),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Y(x_1, x_2, \ldots y, \varphi).$$

Il reste donc simplement à montrer que l'on a aussi, pour chaque indice i en particulier,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = X_i(x_1, x_2, \ldots y, \varphi)$$

Cette relation a lieu pour $y = y_0$ à cause de (5). Pour prouver qu'elle subsiste quand y varie, il n'y a qu'à reproduire la démonstration du n° 234 en affectant de l'indice i les lettres x et X de cette démonstration. Le théorème est donc établi.

Théorème et méthode d'intégration de Mayer. *L'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable entre n + 1 variables revient à l'intégration d'une seule équation à deux variables renfermant n — 1 paramètres arbitraires.*

Considérons l'équation (1) et supposons que les conditions de continuité aient lieu pour le système de valeurs initiales $x_i^0 = 0$, z_0. Au besoin, on réaliserait cette condition par un déplacement d'axes dans le domaine des x_i. Cherchons alors l'intégrale qui a pour valeur z_0 à l'origine des x_i. On peut aller en ligne droite de l'origine des x_i au point quelconque $x_1, x_2, \ldots x_n$ et, pour trouver la valeur de z en ce point, il suffit d'intégrer le long de cette droite. On a, les λ étant constants dans cette hypothèse,

$$x_2 = \lambda_2 x_1, \qquad x_3 = \lambda_3 x_1, \qquad \ldots \qquad x_n = \lambda_n x_1$$

et, en substituant dans l'équation (1),

$$dz = (X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n)\, dx_1.$$

Cette équation-ci est une équation différentielle ordinaire. On résoudra son intégrale par rapport à la constante d'intégration et on choisira la constante de manière que z ait pour valeur initiale z_0. Il viendra ainsi

$$F(z, x_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n) = \text{Const} = F(z_0, 0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n).$$

La valeur de z au point $x_1, x_2, \ldots x_n$ s'en déduit en éliminant les λ, on obtient ainsi l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$F\left(z, x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right) = F\left(z_0, 0, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Forme symétrique de l'équation. — On peut aussi considérer l'équation aux différentielles totales, plus symétrique :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0.$$

On la ramène à la forme précédente en la résolvant par rapport à l'une des différentielles qu'elle contient, considérée comme celle de l'inconnue. La condition d'intégrabilité complète s'établit comme dans le cas de trois variables. Il faut que les identités

$$X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right) + X_l\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) = 0$$

aient lieu pour toutes les combinaisous des indices i, k, l. Mais toutes ces équations ne sont pas indépendantes. Si l'on choisit l'indice i de manière que X_i diffère de 0, il suffira que les identités aient lieu pour toutes les combinaisons k, l, car ces conditions suffisent pour que l'expression résolue par rapport à dx_i soit complètement intégrable.

Quand l'équation est complètement intégrable, elle admet un *multiplicateur*. Quand on connait l'intégrale générale, on peut en déduire un multiplicateur et, connaissant un multiplicateur, on peut en déduire la *solution singulière*, comme dans le cas de trois variables.

242. Systèmes d'équations aux différentielles totales. — Pour simplifier l'écriture, nous allons considérer un système de trois équations seulement, mais les formules, les démonstrations et les théorèmes s'étendront d'eux-mêmes à un nombre quelconque d'équations.

Considérons donc le système de trois équations simultanées entre trois fonctions inconnues x, y, z de n variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots t_n$:

$$(7) \qquad dx = \sum_1^n X_i\, dt_i, \qquad dy = \sum_1^n Y_i\, dt_i, \qquad dz = \sum_1^n Z_i\, dt_i,$$

les lettres X, Y, Z désignant des fonctions des t seulement. Nous définirons le symbole d'opération $\frac{\delta}{\delta t_i}$, en posant

$$(8) \qquad \frac{\delta}{\delta t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} + X_i \frac{\partial}{\partial x} + Y_i \frac{\partial}{\partial y} + Z_i \frac{\partial}{\partial z}$$

Cette opération consiste donc à dériver par rapport à t_i en considérant x, y, z comme fonctions de t_i puis à remplacer les dérivées de x, y, z par rapport à t_i par leurs valeurs tirées du système (7).

On dit que le système (7) est *complètement intégrable* s'il admet un système d'intégrales renfermant trois constantes arbitraires distinctes c'est-à-dire permettant d'attribuer à x, y et z des valeurs initiales arbitraires.

THÉORÈME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (7) *soit complètement intégrable est que les identités*

$$(9) \qquad \frac{\delta X_k}{\delta t_i} = \frac{\delta X_i}{\delta t_k}, \qquad \frac{\delta Y_k}{\delta t_i} = \frac{\delta Y_i}{\delta t_k}, \qquad \frac{\delta Z_k}{\delta t_i} = \frac{\delta Z_i}{\delta t_k},$$

soient vérifiées pour toutes les combinaisons d'indices i, k.

La condition est nécessaire. En effet, l'existence des intégrales étant admise, ces relations sont satisfaites quand on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction des t et des constantes arbitraires, car les seconds membres des équations (7) sont alors des différentielles totales exactes. Mais x, y, z sont arbitraires avec les constantes, donc les relations sont satisfaites par tous les systèmes de valeurs de t, x, y, z.

La condition est suffisante, en vertu du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soient* $t_1^0, \ldots t_n^0$ *et* x_0, y_0, z_0 *un système de valeurs initiales des variables aux environs desquelles les dérivées partielles pre-*

mières des coefficients X, Y *et* Z *par rapport aux inconnues* x, y *et* z *soient continues. Si l'on a les identités* (9), *il existe un système de fonctions* x, y, z *et un seul prenant les valeurs initiales* x_0, y_0, z_0 *au point* $(t_1^0, \ldots t_n^0)$.

Quand les variables t se réduisent à une seule, les équations (7) forment un système d'équations différentielles simultanées ordinaires. Dans ce cas, les conditions (9) disparaissent et l'existence des intégrales est établie. On peut donc considérer le théorème comme vrai dans le cas d'une seule variable t.

Pour montrer qu'il est général, nous le supposerons donc déjà démontré pour $n-1$ variables t et nous allons montrer qu'il subsiste par n.

Laissons d'abord t_n constant ; remplaçons x, y, z par ξ, η, ζ et cherchons les intégrales ξ, η, ζ du système

$$(10) \qquad d\xi = \sum_1^{n-1} X_i\, dt_i, \qquad d\eta = \sum_1^{n-1} Y_i\, dt_i, \qquad d\zeta = \sum_1^{n-1} Z_i\, dt_i$$

qui se réduisent à x_0, y_0, z_0 au point $t_1^0, \ldots t_{n-1}^0$.

Celles-ci trouvées, ne faisons plus varier que t_n, et cherchons les intégrales x, y, z du système

$$(11) \qquad \frac{dx}{dt_n} = X_n, \qquad \frac{dy}{dt_n} = Y_n, \qquad \frac{dz}{dt_n} = Z_n,$$

qui se réduisent à ξ, η, ζ au point t_n^0.

Je dis que ces intégrales x, y, z, considérées comme fonctions de toutes les variables t, seront les intégrales cherchées du système (7).

En effet, elles prennent les valeurs x_0, y_0, z_0 au point $(t_1^0, \ldots t_n^0)$. D'autre part, on a, puisque ce sont les intégrales de (11),

$$(12) \qquad \frac{\partial x}{\partial t_n} = X_n, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_n} = Y_n, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_n} = Z_n.$$

Il reste donc à montrer que l'on a aussi, pour un indice i autre que n,

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} = Y_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i.$$

Ces relations sont vérifiées si $t_n = t_n^0$, car, (x, y, z) se réduisant à (ξ, η, ζ), elles se tirent de (10). Pour montrer qu'elles subsistent pour les autres valeurs de t_n, posons

$$(13) \qquad \frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i + u, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_t} = Y_i + v, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i + w$$

et montrons que u, v, w, qui sont nuls pour $t_n = t_n^0$, restent nuls quand t_n varie.

A cet effet, calculons les dérivées de u, v, w en ne faisant varier que t_n. On a

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \, \partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_n},$$

ou, en abrégé, eu égard aux relations (**12**) et (**8**),

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) - \frac{\partial X_i}{\partial t_n}.$$

Mais, puisque $\dfrac{\partial x}{\partial t_n} = X_n$, il vient, eu égard à (**13**),

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) = \frac{\partial X_n}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_i}$$

$$= \frac{\partial X_n}{\partial t_i} + u \frac{\partial X_n}{\partial x} + v \frac{\partial X_n}{\partial y} + w \frac{\partial X_n}{\partial z}.$$

Portant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient, grâce à (**9**), la première des trois équations du système suivant (les deux autres s'obtenant par un calcul analogue) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt_n} &= u \frac{\partial X_n}{\partial x} + v \frac{\partial X_n}{\partial y} + w \frac{\partial X_n}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt_n} &= u \frac{\partial Y_n}{\partial x} + v \frac{\partial Y_n}{\partial y} + w \frac{\partial Y_n}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt_n} &= u \frac{\partial Z_n}{\partial x} + v \frac{\partial Z_n}{\partial y} + w \frac{\partial Z_n}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires entre u, v, w et t_n.

On obtient un système d'intégrales s'annulant pour $t_n = t_n^0$ en posant $u = v = w = 0$ et il n'y a pas d'autre système satisfaisant aux mêmes conditions initiales, donc u, v et w sont bien nuls.

Méthode d'intégration de Mayer. — *L'intégration du système* (**7**) *complètement intégrable à n variables indépendantes, revient à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires renfermant $n - 1$ paramètres arbitraires.*

En effet, supposons les conditions de continuité relatives aux valeurs initiales réalisées pour un système de valeurs *nulles* des t et les valeurs x_0, y_0 et z_0 des fonctions inconnues. Au besoin, on réalisera cette condition par un déplacement d'axes. Cherchons le système d'intégrales

x, y, z ayant ces valeurs initiales à l'origine des t. Allons en ligne droite de l'origine des t au point quelconque t_1, t_2,... t_n et intégrons les équations (7) le long de cette droite. On a, les λ étant constants,

$$t_2 = \lambda_2 t_1, \qquad t_3 = \lambda_3 t_1, \quad \ldots \quad t_n = \lambda_n t_n$$

et, en substituant dans les équations (7), il vient ($\lambda_1 = 1$)

$$\frac{dx}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i X_i, \qquad \frac{dy}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Y_i, \qquad \frac{dz}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Z_i,$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires. Les intégrales, résolues par rapport aux constantes d'intégration, seront

$$F_1 (x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \alpha, \qquad F_2 = \beta, \qquad F_3 = \gamma.$$

On détermine les constantes de façon que x, y, z aient les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 pour $t_1 = 0$; il vient ainsi

$$F_i (x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = F_i (x_0, y_0, z_0, 0, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Les valeurs de x, y, z, au point quelconque t_1,... t_n s'en déduisent en éliminant les λ ; ce sont les fonctions implicites définies par le système

$$F_i \left(x, y, z, x_1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_n} \right) = F_i \left(x_0, y_0, z_0, 0, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1} \right)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Ces équations fournissent les intégrales cherchées.

CHAPITRE VI.

Questions spéciales : Fonctions circulaires et Eulériennes; Séries de Fourier.

---

§ 1. Expressions des fonctions circulaires et hyperboliques en produits infinis et en séries de fractions.

243. Décomposition de $\sin m\theta$ en facteurs. — Nous considérons seulement le cas où m est un entier impair $2n+1$.

L'expression de $\sin m\theta$ se tire de la *formule de Moivre* :

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m,$$

en égalant les coefficients de i dans les deux membres. Il vient ainsi, pour toute valeur *réelle ou imaginaire* de θ,

$$\sin m\theta = m\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \cdots$$

Par conséquent, m étant égal à $2n+1$,

$$\frac{\sin m\theta}{\sin\theta} = \cos^{2n}\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots$$

Tous les exposants sont pairs au second membre. Donc, si l'on remplace $\cos^2\theta$ par $1-\sin^2\theta$, le second membre se transforme en un polynome de degré n en $\sin^2\theta$.

Posons, en abrégé, $z=\sin^2\theta$ et soit $F_n(z)$ ce polynome de degré n ; on peut écrire, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ les racines de $F_n(z)$,

$$(1)\quad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right), \quad (z=\sin^2\theta)$$

les deux membres ayant la même limite 1 quand θ et, par suite, z tendent vers 0.

Mais les racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ de $F_n(z)$ s'obtiennent tout de suite. En effet, $\sin m\theta$ s'annule pour les valeurs $\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \cdots \frac{n\pi}{m}$ de θ, toutes

inférieures à $\frac{\pi}{2}$ (car $m = 2n + 1$) et auxquelles correspondent les valeurs croissantes (donc différentes) de z :

$$(2) \qquad \alpha_1 = \sin^2 \frac{\pi}{m}, \qquad \alpha_2 = \sin^2 \frac{2\pi}{m}, \qquad \cdots \qquad \alpha_n = \sin^2 \frac{n\pi}{m},$$

qui sont donc les racines de $F_n(z)$, car $\sin\theta$ ne s'annule pas.

Portant les valeurs (2) dans (1), on aura la formule de décomposition cherchée.

244. Décompositions de Sh x et de sin x en produits infinis. — Soit x une variable réelle ; changeons θ en $\frac{xi}{m}$ dans la formule (1). Il faut remplacer $\sin\theta$ par $i \operatorname{Sh} \frac{x}{m}$ et $\sin m\theta$ par $i \operatorname{Sh} x$. Il vient donc

$$\frac{\operatorname{Sh} x}{m \operatorname{Sh} \frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{x}{m}}{\alpha_k}\right) \qquad (m = 2n + 1).$$

Tout est positif dans le second membre de cette formule. Prenons les logarithmes : le produit sera remplacé par une somme. Soit p un entier $< n$; nous aurons

$$(3) \qquad \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Sh} x}{m \operatorname{Sh} \frac{x}{m}} = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{x}{m}}{\alpha_k}\right) + R_p,$$

en désignant par R_p la somme des logarithmes non écrits, qui sont tous positifs. Mais, si α est positif, on a $e^\alpha > 1 + \alpha$, par conséquent $\alpha > \operatorname{Log}(1 + \alpha)$; il vient donc

$$0 < R_p < \sum_{p+1}^{n} \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{x}{m}}{\alpha_k} = \left(\operatorname{Sh}^2 \frac{x}{m}\right) \sum_{p+1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}.$$

Quand k varie de 1 à $n = \frac{m-1}{2}$, le rapport $\left(\sin \frac{k\pi}{m}\right) : \frac{k\pi}{m}$, qui est celui du sinus à l'arc, décroît constamment sans atteindre le minimum $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) : \frac{\pi}{2}$ qui est égal à $\frac{2}{\pi}$. On a donc

$$\frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]$$

et, par conséquent, *a fortiori*

$$R_p < \frac{m^2}{4}\left(\mathrm{Sh}^2\frac{x}{m}\right)\sum_{p+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right] = \frac{m^2}{4p}\,\mathrm{Sh}^2\frac{x}{m}.$$

Faisons maintenant tendre m vers l'infini dans la formule (3), et observons que l'on a

$$\lim m\,\mathrm{Sh}\frac{x}{m} = x, \qquad \lim m^2\alpha_k = \lim m^2 \sin^2\frac{k\pi}{m} = k^2\pi^2\,;$$

il vient

$$\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{Sh}\,x}{x} = \sum_1^p \mathrm{Log}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) + \lim R_p,$$

$$0 < \lim R_p < \frac{x^2}{4p}.$$

Si l'on fait tendre maintenant p vers l'infini, $\lim R_p$ tend vers 0 et l'on trouve

$$(4)\qquad \mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{Sh}\,x}{x} = \mathrm{Log}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \sum_1^{\infty}\mathrm{Log}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Enfin, en repassant des logarithmes aux nombres, on obtient $\mathrm{Sh}\,x$ sous forme de *produit infini*, c'est-à-dire comme limite du produit d'un nombre illimité de facteurs :

$$(5)\qquad \mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

La décomposition de $\sin x$ peut s'obtenir directement, par un raisonnement analogue. Mais on peut la déduire de la formule précédente. Il suffit de remarquer que *la formule* (5) *subsiste si l'on remplace x par une variable imaginaire z.*

En effet, le produit qui constitue le second membre de (5) se développe, par les multiplications successives, en une somme de puissances de x toutes positives. Donc, l'ordre des termes étant indifférent, ce second membre peut être ordonné suivant les puissances de x, ce qui le ramènera nécessairement à la série potentielle qui définit $\mathrm{Sh}\,x$.

Cette réduction à la série qui définit le sinus hyperbolique demeure légitime quand on remplace x par une imaginaire z de module x, car la somme de puissances de x sera seulement remplacée par une somme absolument convergente de puissances de z et l'ordre des termes demeure indifférent.

Donc on peut remplacer x par ix dans (5) et l'on en déduit

$$(6)\qquad \sin x = x\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

On tire de là le développement analogue

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right)$$

245. **Séries de fractions**. — Si l'on dérive la formule (4), il vient, pour toute valeur réelle de x,

$$(7) \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} = 2x \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi^2 + x^2}.$$

En effet, cette série, ayant tous ses termes inférieurs à ceux de la série convergente à termes positifs $\Sigma\, k^{-2}$, est *uniformément* convergente quand x varie d'une manière quelconque, ce qui justifie la dérivation.

De même, remplaçons, dans (6), $\sin x$ et tous les facteurs par leur valeur absolue ; prenons les logarithmes des deux membres, et dérivons. Il viendra

$$(8) \qquad \cot x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi^2 - x^2}$$

En effet, cette série converge encore absolument et *uniformément* dans tout intervalle où les dénominateurs ne s'annulent pas, car le rapport de son terme général à celui de la série $\Sigma\, k^{-2}$ tend vers une limite finie pour k infini.

Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{x + k\pi},$$

on voit que la formule (8) peut s'écrire plus simplement

$$(9) \qquad \cot x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - k\pi},$$

à la condition d'associer dans la sommation les valeurs $+ k$ et $- k$.

Le développement de $\cot x$, en donne encore d'autres :

$$\operatorname{tg} x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - 2k\pi} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - (2k+1)\pi},$$

ou, plus simplement,

$$(10) \qquad \frac{1}{\sin x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - k\pi} = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

Remarque. — Il est souvent utile d'écrire la formule (7) sous une autre forme. On remarque que l'on a

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1} + 1.$$

On substitue cette valeur dans le premier membre de (7), puis on change x en $x : 2$. L'équation prend la forme

$$(11) \qquad \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = 2x^2 \sum_1^\infty \frac{1}{4k^2\pi^2 + x^2}$$

246. Calcul d'une intégrale d'Euler. — Soit x une quantité comprise entre 0 et 1 ; on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^{n-1} (-x)^k + (-1)^n \theta x^n,$$

et θ est compris entre 0 et 1, car θ est égal à $1 : (1+x)$.

Donc, si a désigne une quantité *positive*, il vient, en multipliant la relation précédente par $x^{a-1}\,dx$ et intégrant, puis en observant que θ peut sortir du signe d'intégration tout en gardant le sens d'une quantité comprise entre 0 et 1,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{a+k} + \frac{(-1)^n \theta}{a+n}.$$

Enfin, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Supposons maintenant a compris entre 0 et 1 ; on peut changer a en $1-a$ dans cette intégrale, puis x en $1 : x$; il vient

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{1+x} = \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{a-k}.$$

Ajoutons cette relation à la précédente, nous trouvons, par (10),

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a\pi - k\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette intégrale importante est due à Euler, qui l'a calculée par un procédé très différent du précédent.

§ 2. Nombres et polynomes de Bernoulli.

247. Développement de $\frac{x}{e^x - 1}$ en série potentielle. — Soit x une quantité positive ; on a $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{x}{1+x} = -\sum_1^{n-1}(-x)^p - \frac{(-x)^n}{1+x} = -\sum_1^{n-1}(-x)^p - \theta(-x)^n$$

Donc, en changeant x en $x^2 : 4k^2\pi^2$, et en supposant seulement x réel,

$$\frac{x^2}{4k^2\pi^2 + x^2} = -\sum_{p=1}^{n-1}\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^p - \theta\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^n$$

Portons ces développements dans le second membre de la formule (11) du n° précédent ; en posant en abrégé

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \ldots,$$

il viendra ($0 < \theta < 1$)

$$(1) \quad \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = -2\sum_{p=1}^{n-1} s_{2p}\left(-\frac{x^2}{2\pi}\right)^p - 2\theta\, s_{2n}\left(-\frac{x^2}{2\pi}\right)^n$$

Si n tend vers l'infini, s_{2n} tend vers l'unité et le dernier terme tend vers 0, pourvu que $|x|$ soit $< 2\pi$. Donc, si $|x|$ est $< 2\pi$, on a le développement en série potentielle

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = 2\left[\frac{s_2 x^2}{(2\pi)^2} - \frac{s_4 x^4}{(2\pi)^4} + \frac{s_6 x^6}{(2\pi)^6} - \ldots\right]$$

248. Nombres de Bernoulli. — Les nombres de Bernoulli [1] sont les nombres $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ définis par le développement en série

$$(2) \quad \frac{x}{e^x-1} = 1 + \frac{B_1 x}{1} + \frac{B_2 x^2}{2\,!} + \cdots + \frac{B_n x^n}{n\,!} + \cdots.$$

qui converge, comme on vient de le voir, pourvu que $|x|$ soit $< 2\pi$.

Comparant cette formule à la précédente, on en conclut que tous les nombres B d'indice impair sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$, et que les nombres d'indice pair, $B_2, B_4, \ldots$ sont alternativement positifs et négatifs. On a effectivement

$$(3) \quad B_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{2\,(2n)\,!}{(2\pi)^{2n}}\, s_{2n}.$$

Quand n est grand, s_{2n} diffère peu de 1 ; cette formule montre que les nombres de Bernoulli croissent très rapidement quand n augmente.

Si l'on introduit la notation des nombres de Bernoulli dans la formule (1), il vient, x étant réel et θ compris entre 0 et 1,

[1] La notation des nombres de Bernoulli est variable avec les auteurs. Nous avons adopté celle d'Edouard Lucas qui est la plus commode.

$$(4)\quad \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{B_2 x^2}{2\,!} + \frac{B_4 x^4}{4\,!} + \dots + \frac{B_{2n-2} x^{2n-2}}{(2n-2)\,!} + \theta \frac{B_{2n}\, x^{2n}}{(2n)\,!}$$

249. Calcul des nombres de Bernoulli. — Nous allons montrer que *les nombres de Bernoulli sont rationnels.* Pour les calculer, il est commode de se servir de la notation symbolique suivante :

Convenons de remplacer B^n par B_n dans le développement de e^{Bx} en série potentielle ; la formule (2) pourra s'écrire symboliquement

$$(5)\qquad \frac{x}{e^x - 1} = e^{Bx}$$

L'utilité de cette notation vient de la propriété suivante :

Si l'on multiplie la série e^{Bx} par celle qui représente $e^{\alpha x}$, on aura aussi symboliquement

$$e^{\alpha x}\, e^{Bx} = e^{(\alpha + B)x}.$$

En effet, si l'on considère B comme une indéterminée, l'égalité précédente a lieu par la propriété de l'exponentielle. Les deux membres peuvent être ordonnés suivant les puissances de B ; après quoi, les coefficients des mêmes puissances de B doivent être identiques de part et d'autre. L'identité des deux membres subsiste donc quand on remplace B, B^2,... par B_1, B_2,... Cette substitution donne aux deux membres leur sens symbolique. D'ailleurs les séries convergent pourvu que x soit $< 2\pi$ en valeur absolue.

Chassons le dénominateur dans l'équation (5) ; il vient

$$(6)\qquad x = e^{(B+1)x} - e^{Bx}$$

Par suite, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les équations symboliques :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} (B+1) - B = 1 \\ (B+1)^2 - B^2 = 0 \\ (B+1)^3 - B^3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (B+1)^n - B^n = 0 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 2B_1 + 1 = 0 \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

C'est un système de formules récurrentes à coefficients entiers, d'où l'on tire de proche en proche les valeurs de B_1, B_2, B_3,...

On trouve (B_{2n+1} étant nul) :

$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_8 = -\frac{1}{30} \qquad B_{14} = \frac{7}{6}$$

$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad B_{10} = \frac{5}{66} \qquad B_{16} = -\frac{3617}{510}$$

250. Propriétés des nombres de Bernoulli. — Multiplions la formule (6) par e^{yx}; il vient

$$xe^{yx} = e^{(B+1+y)x} - e^{(B+y)x}.$$

d'où, en égalant les coefficients de x^n de part et d'autre,

$$(8) \qquad ny^{n-1} = (B+1+y)^n - (B+y)^n.$$

Désignons par $f(y)$ un polynome entier quelconque

$$f(y) = a_0 y^p + a_1 y^{p-1} + \cdots + a_{p-1} y + a_p$$

Remplaçons successivement, dans l'identité (8), n par p, $p-1$, $p-2$,... 1; multiplions les résultats successifs respectivement par a_0, a_1, a_2,... a_{p-1} et ajoutons. Il vient

$$(9) \qquad f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y).$$

C'est l'identité symbolique fondamentale à laquelle satisfont les nombres de Bernoulli.

Voici quelques cas particuliers :

1°) Soit $f(y) = (2y-1)^p$; on a, pour $y = 0$,

$$(2B+1)^p - (2B-1)^p = 2p(-1)^{p-1}$$

2°) Soit $f(y) = y(y+1)(y+2)\ldots(y+p)$; on a, pour $y = 0$,

$$(p+1)(B+1)(B+2)\ldots(B+p) = p\,!$$

3°) Soit $1 \leqq q \leqq p$; posons $f(y) = (y-1)^p y^q$; on a, pour $y = 0$,

$$B^p(B+1)^q - B^q(B-1)^p = 0.$$

Cette dernière formule, qui est due à *Stern*, est peut-être la plus commode pour le calcul des nombres de Bernoulli, parce qu'elle ne contient pas tous les nombres B, mais seulement ceux qui sont compris entre B_q et B_{p+q}.

251. Polynomes de Bernoulli. — Les polynomes de Bernoulli sont les polynomes $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$,... $\varphi_n(v)$, définis par le développement

$$(10) \qquad \frac{e^{vx}-1}{e^x-1} = v + \varphi_1(v)x + \varphi_2(v)x^2 + \cdots + \varphi_n(v)x^n + \cdots,$$

Ces polynomes dépendent des nombres de Bernoulli et on obtient immédiatement leur expression symbolique. On a, en effet, si $|x| < 2\pi$.

$$(e^{vx}-1)\frac{1}{e^x-1} = \frac{(e^{vx}-1)e^{Bx}}{x} = \frac{e^{(B+v)x} - e^{Bx}}{x}$$

Donc, en égalant $\varphi_n(v)$ au coefficient de x^n, il vient

(11) $$\varphi_n(v) = \frac{(B+v)^{n+1} - B^{n+1}}{(n+1)!}$$

Les polynomes de Bernoulli fournissent l'expression générale des sommes des puissances semblables des nombres entiers.

En effet, si v est entier, on a

$$\frac{e^{vx}-1}{e^x-1} = 1 + e^x + e^{2x} + \cdots + e^{(v-1)x}$$

et, en égalant les coefficients de x^n $(n > 0)$,

$$\varphi_n(v) = \frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots (v-1)^n}{n!}.$$

On en tire

$$1 + 2^n + 3^n + \cdots + (v-1)^n = n!\,\varphi_n(v).$$

252. Propriétés des polynomes de Bernoulli. — 1° *Les polynomes $\varphi_n(v)$ s'annulent si $v = 0$ ou si $v = 1$.*

Si $v = 0$, $\varphi_n(v)$ s'annule en vertu de la formule (**11**) ;

Si $v = 1$, il vient, par la même formule,

$$\varphi_n(v) = \frac{(B+1)^{n+1} - B^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

car $(B+1)^{n+1} = B^{n+1}$ en vertu des formules (**7**).

2° Il existe une *relation remarquable entre deux polynomes consécutifs*. Dérivons, en effet, la formule (**11**); il vient

$$\varphi_n'(v) = \frac{(B+v)^n}{n!} = \varphi_{n-1}(v) + \frac{B^n}{n!}$$

Il y a deux cas à distinguer ; B^n (ou B_n) est nul si n est impair; donc, selon que $n = 2k$ ou $2k+1$, on a

(12) $$\begin{cases} \varphi_{2k}'(v) = \varphi_{2k-1}(v) + \dfrac{B_{2k}}{(2k)!}, \\ \varphi_{2k+1}'(v) = \varphi_{2k}(v) \end{cases}$$

3° Comparons maintenant $\varphi_n(1+v)$ et $\varphi_n(-v)$. Changeons à la fois dans l'équation (**10**) v en $-v$ et x en $-x$; il vient

$$\frac{e^{vx}-1}{e^{-x}-1} = -v + \Sigma\,\varphi_n(-v)\,(-x)^n$$

Mais on vérifie immédiatement que l'on a

$$\frac{e^{vx}-1}{e^{-x}-1} = 1 - \frac{e^{(v+1)x}-1}{e^x-1} = -v - \Sigma\,\varphi_n(v+1)x^n$$

Par conséquent, en identifiant ces deux développements,

$$(13)\qquad \varphi_n(1+v) = (-1)^{n+1}\varphi_n(-v).$$

Si n est pair, en posant $v = -\frac{1}{2}$, il vient $\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc *les polynomes* $\varphi_n(v)$ *d'indice pair s'annulent si* $v = \frac{1}{2}$.

4° *Un polynome* $\varphi_{2k+1}(v)$ *d'indice impair ne peut reprendre plus de deux fois la même valeur quand v varie de* 0 *à* 1.

En effet, s'il reprenait trois fois la même valeur, sa dérivée (12)

$$\varphi'_{2k+1}(v) = \varphi_{2k}(v)$$

s'annulerait pour deux valeurs au moins de v comprises entre 0 et 1. D'ailleurs elle s'annule déjà à ces deux limites, elle s'annulerait donc au moins quatre fois, et sa dérivée (12)

$$\varphi'_{2k}(v) = \varphi_{2k-1}(v) + \frac{B_{2k}}{(2k)!}$$

au moins trois fois. Donc $\varphi_{2k-1}(v)$ reprendrait au moins trois fois la même valeur. Il en serait de même de $\varphi_{2k-3}, \varphi_{2k-5}, \ldots \varphi_1$, ce qui est impossible, ce dernier polynome étant du second degré.

5° *Un polynome d'indice impair ne change pas de signe quand v varie de* 0 à 1. En effet, il ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant et, comme il s'annule aux deux limites, il s'annulerait trois fois, ce qui est impossible.

6° *Un polynome d'indice pair s'annule pour* $v = 0, \frac{1}{2}$ *et* 1, *en vertu des propriétés* 1° *et* 3°, *mais il ne s'annule pour aucune autre valeur de v entre* 0 *et* 1. En effet, si φ_{2k} s'annulait quatre fois, φ_{2k-1} reprendrait au moins trois fois la même valeur, comme on l'a montré dans la démonstration du 4°, ce qui est impossible.

Il résulte encore de là que c'est pour $v = \frac{1}{2}$ que les polynomes d'indice impair prennent leur plus grande valeur absolue entre 0 et 1, puisque c'est la valeur qui annule leur dérivée en vertu des équations (12).

§ 3. Intégrales eulériennes du 1re et de 2me espèce.

253. Définitions et premières propriétés. — Legendre a donné le nom *d'intégrales eulériennes de première et de deuxième espèce* aux expressions :

$$(1)\qquad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

La première est la fonction *Bêta*, la seconde la fonction *Gamma*.

Ces intégrales sont absolument convergentes pourvu que a et b soient > 0 (nos 59 et 63). Elles cessent d'exister si a ou b est < 0 (b n'intervenant que pour B). Il sera donc entendu, dans ce chapitre, que a et b sont réels et positifs.

Assignons aux variables a et b un minimum positif ε ; tous les éléments de l'intégrale B sont alors maxima et positifs si $a = b = \varepsilon$, ce qui laisse subsister la convergence. Donc B converge uniformément (n° 82) et est fonction continue de a et de b (n° 83).

Supposons maintenant que a varie dans un intervalle positif (ε, A). Faisons la décomposition

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx\,;$$

ces deux intégrales convergeront uniformément, car leurs éléments sont respectivement égaux ou inférieurs à ceux des deux intégrales convergentes :

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1}\, dx, \qquad \int_1^\infty x^{A-1} e^{-x}\, dx.$$

Donc Γ est une fonction continue de a.

Voici maintenant quelques propriétés qui résultent immédiatement des définitions :

1° Si, dans l'expression (1) de B, on change la variable x en $1 - x$, cela revient à permuter a et b. Par conséquent,

$$\text{(2)} \qquad B(a, b) = B(b, a).$$

2° *Si a ou b est entier, on obtient* $B(a, b)$ *sous forme explicite.*

En effet, soit b entier ; on a d'abord, si $b = 1$,

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a}.$$

Ensuite, si b est un entier $n > 1$, on trouve, en intégrant par parties,

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a}\int_0^1 x^a (1-x)^{n-2}\, dx = \frac{n-1}{a} B(a+1, n-1)$$

et ainsi, de proche en proche,

$$\text{(3)} \qquad B(a, n) = \frac{1 . 2 . \dots (n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}.$$

3° On a la relation, d'un usage fréquent,

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \tag{4}$$

qui se démontre par l'intégration par parties ci-dessous :

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx = \left[-x^a e^{-x}\right]_0^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx,$$

le terme aux limites étant nul.

Si n est entier, on a, en appliquant (4) de proche en proche,

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\cdots(a+n-1)\,\Gamma(a). \tag{5}$$

Cette formule permet de réduire à (0,1) l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

4° On voit immédiatement, par la formule (1), que $\Gamma(1) = 1$. Donc, si n est entier, on obtient, par la formule (5), $\Gamma(n+1)$ sous forme explicite :

$$\Gamma(n+1) = n\,!$$

On remarquera, en particulier que $\Gamma(2) = 1$.

5° Multiplions par $\Gamma(a)$ les deux termes de la fraction qui forme le second membre de (3) ; il viendra, par (5) et puisque $(n-1)\,! = \Gamma(n)$,

$$B(a, n) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)} \tag{6}$$

Cette formule n'est encore établie que si n est entier, mais on va montrer dans le n° suivant qu'elle est générale.

6° Soit y un nombre positif ; si l'on change la variable d'intégration x en yx dans l'expression (1) de Γ, on obtient la formule importante

$$\frac{\Gamma(a)}{y^a} = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-yx}\,dx. \tag{7}$$

254. Nouvelle expression de B. Réduction définitive de B à Γ. — Dans l'expression (1) de B, faisons le changement de variable

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Les nouvelles limites seront 0 et ∞ ; il viendra donc

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{(1+y)^{a+b}}. \tag{8}$$

On tire de cette formule la démonstration générale de la formule (6). On a, effet, par la formule (7),

$$\int_0^\infty x^{a+b-1}\, e^{-(1+y)x}\, dx = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}}.$$

Multiplions par $y^{b-1}\, dy$ et intégrons de 0 à ∞. On peut intervertir les intégrations dans le premier membre, car les fonctions sont positives et, comme on va le constater, les résultats déterminés (nº 75) ; il vient ainsi

$$\int_0^\infty x^{a+b-1}\, e^{-x}\, dx \int_0^\infty y^{b-1}\, e^{-yx}\, dy = \Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{y^{b-1}\, dy}{(1+y)^{a+b}},$$

ou, par (7) et (8),

$$\Gamma(b) \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(a+b)\, \mathrm{B}(a, b)$$

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{9}$$

Cette formule, dont la démonstration précédente est due à Jacobi, ramène l'étude B à celle Γ, qui ne dépend plus que d'un paramètre.

Remarque. — Revenons à l'intégrale (8). On peut, en même temps que l'intervalle d'intégration, la partager en deux autres étendues de 0 à 1 et de 1 à ∞. Changeons y en $1 : y$ dans cette dernière ; il viendra

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy, \tag{10}$$

formule qui met aussi la symétrie en évidence.

255 Relation des compléments. — On a, par les formules (9) et (8),

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x}.$$

La valeur de cette intégrale a été calculée au nº 246. On en conclut la formule importante, trouvée par Euler et connue sous le nom de *relation des compléments*,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{11}$$

En particulier, si $a = \frac{1}{2}$, on en tire

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \qquad \text{d'où [1]} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

La relation (**11**) ramène le calcul de $\Gamma(a)$ à celui de $\Gamma(1 - a)$ et, par conséquent, permet de réduire à $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

256. Formule de Legendre. — On tire des formules (**9**) et (**10**)

$$B(a, a) = \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = 2\int_0^1 \frac{y^{a-1}\,dy}{(1+y)^{2a}}.$$

Faisons le changement de variable $y = \frac{1-z}{1+z}$, il vient

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^1 (1 - z^2)^{a-1}\,dz$$

ou, en changeant encore z en $\sqrt{z}$,

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 (1 - z)^{a-1}\, z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{B\left(a, \frac{1}{2}\right)}{2^{2a-1}}.$$

Remplaçons $B(a, a)$ et $B\left(a, \frac{1}{2}\right)$ par leurs expressions en Γ tirées de (**9**), puis $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par $\sqrt{\pi}$; la relation précédente donnera

$$(12) \qquad \Gamma(a)\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a).$$

Cette relation a été trouvée par Legendre.

En y changeant a en $\frac{a}{2}$, on peut l'écrire

$$\Gamma(a) = \frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

En tenant compte de (**11**), cette relation permet de réduire à $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

257. Produit d'Euler. — Substituons successivement dans la relation (**11**) $a = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}$ et multiplions les résultats ; il vient

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi}.$$

[1] On obtient aussi ce résultat en changeant x en $\sqrt{x}$ dans l'intégrale du n° 69.

Pour évaluer ce produit de sinus, considérons la décompostion en facteurs

$$x^n - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2k\pi i}{n}} \right).$$

En y faisant tendre x vers 1, on en tire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{n}} \right) = \lim \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

Multiplions, facteur par facteur, cette relation avec

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}}{2i} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi i}{2}}}{(2i)^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}};$$

nous trouvons, eu égard à l'expression du sinus en exponentielles,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Par conséquent,

$$(13) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Cette relation a été trouvée par Euler et généralisée par Gauss (n° 261).

258. Intégrale de Raabe. — On tire de la relation précédente, en prenant les logarithmes et divisant par n,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) \operatorname{Log} 2\pi - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Log} n}{n}.$$

Faisons tendre n vers l'infini ; on peut faire dans la somme du premier membre $\frac{k}{n} = x$ et $\frac{1}{n} = dx$, et la limite de cette somme est une intégrale définie ; il vient

$$\int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi = \operatorname{Log} \sqrt{2\pi}.$$

Ce résultat permet de calculer facilement l'intégrale de Raabe, qui est la suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(a + x)\, dx = \int_a^{a+1} \operatorname{Log} \Gamma(x)\, dx.$$

En effet, les dérivées de $\Gamma(a+x)$ sont les mêmes par rapport à x et à a ; donc

$$\mathrm{D}_a \mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}\, dx = \mathrm{Log}\, \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \mathrm{Log}\, a,$$

car $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$, en vertu de (4). Par conséquent,

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{Log}\, a\, da = a\,(\mathrm{Log}\, a - 1) + \mathrm{C}.$$

La constante C se détermine pour $a = 0$; il vient, comme on l'a prouvé au début du n° actuel, $\mathrm{C} = \mathrm{I}_0 = \mathrm{Log}\sqrt{2\pi}$. En définitive, *l'intégrale de Raabe* s'évalue par la formule

$$(14) \qquad \mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{Log}\, \Gamma(a+x)\, dx = a(\mathrm{Log}\, a - 1) + \mathrm{Log}\sqrt{2\pi}.$$

Cette intégrale joue un rôle important dans la théorie de la fonction Γ ; on verra plus loin (n° 270) qu'elle est la valeur asymptotique de $\mathrm{Log}\, \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

§ 4. Les fonctions D Log $\Gamma(a)$ et D² Log $\Gamma(a)$. Expressions des fonctions eulériennes en séries et produits infinis.

259. Calcul de DLog$\Gamma(a)$. Formule de Cauchy. — En dérivant sous le signe l'intégrale qui définit Γ, il vient

$$(15) \qquad \Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, \mathrm{Log}\, x\, dx = \int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, \mathrm{Log}\, x\, dx.$$

Cette dérivation est légitime, car chacune des deux intégrales de 0 à 1 et de 1 à ∞ ci-dessus converge uniformément quand a varie dans un intervalle positif quelconque $(\varepsilon, \mathrm{A})$: elles ont, en effet, respectivement leur élément moindre que celui des intégrales correspondantes à éléments positifs et bien déterminées :

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1} (-\mathrm{Log}\, x)\, dx, \qquad \int_1^\infty x^{\mathrm{A}} e^{-x}\, dx,$$

car e^{-x} est < 1 et (pour $x > 1$) $\mathrm{Log}\, x$ est > 0 et $< x$.

Nous allons transformer la formule (15). Soit y un paramètre positif ; considérons la relation

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\, dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx - \frac{1}{y} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(1+y)x}\, dx,$$

qui peut aussi s'écrire, eu égard à (1) et (7),

$$\int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}dx = \frac{\Gamma(a)}{y}\left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right].$$

Multiplions par dy et intégrons de 0 à ∞. On peut intervertir les signes d'intégration dans le premier membre (nº 75), car la fonction à intégrer est toujours négative sous le signe $\int_0^1$ et toujours positive sous le signe $\int_1^\infty$ et, en se rappelant qu'on a (nº 94)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-xy}}{y}dy = \text{Log}\, x,$$

on trouve le résultat *déterminé*

$$\int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\text{Log}\, x\, dx = \Gamma'(a) = \Gamma(a)\int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right]\frac{dy}{y}$$

D'où la *formule de Cauchy* :

$$\text{(16)} \qquad \text{DLog}\Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right]\frac{dy}{y}.$$

260. Formule de Gauss. Constante d'Euler. — En faisant $a = 1$ dans la formule de Cauchy, on obtient la relation suivante, qui définit la constante d'Euler C :

$$\text{(17)} \qquad -\text{C} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{1+y}\right]\frac{dy}{y}$$

Soustrayons cette équation de (16) ; il vient

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \text{C} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right)\frac{dy}{y}$$

et, en posant $1 + y = 1 : x$, on trouve la *formule de Gauss* :

$$\text{(18)} \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \text{C} = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}dx.$$

Si a est rationnel, on peut effectuer l'intégration ; en particulier, si a est un entier n, on a

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + \text{C} = \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-2})dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

C'est de cette formule qu'on se sert pour calculer C, en utilisant les formules d'approximation de $\Gamma'(n) : \Gamma(n)$ que nous indiquerons plus loin (nº 269). La valeur de C est

$$\text{C} = 0{,}5772\,1566\,4901\,5328\ldots$$

261. Produit de Gauss. — C'est une généralisation de la formule d'Euler (nº 257). Changeons, dans la formule (**18**), a en $a+\frac{k}{n}$ où k et n sont entiers, ensuite la variable x en x^n; il vient

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+\mathrm{C}=\int_0^1 dx\frac{1-x^{a+\frac{k}{n}-1}}{1-x}=n\int_0^1 dx\frac{x^{n-1}-x^{na-1+k}}{1-x^n}.$$

Faisons $k=0, 1, 2,\ldots (n-1)$ et ajoutons ; il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+n\mathrm{C}=n\int_0^1 dx\frac{nx^{n-1}-x^{na-1}\Sigma x^k}{1-x^n}$$
$$=n\int_0^1 dx\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right)$$

Soustrayons de cette équation n fois la suivante, tirée de (**18**) :

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+\mathrm{C}=\int_0^1 dx\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right);$$

il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=n\int_0^1 dx\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right).$$

Le second membre se ramène à une intégrale de *Frullani* (nº 94), par la substitution $x=e^{-z}$; il devient ainsi

$$n\int_0^\infty\left(\frac{nze^{-nz}}{1-e^{-nz}}-\frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}}\right)\frac{dz}{z}=n\int_0^\infty\frac{f(nz)-f(z)}{z}\,dz=-n\operatorname{Log}n.$$

Remplaçons donc le second membre de l'équation précédente par $-n\operatorname{Log}n$ et intégrons ; il vient

$$\operatorname{Log}\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\operatorname{Log}n+\operatorname{Log}\mathrm{C}.$$

On détermine la constante d'intégration C, en faisant $a=\frac{1}{n}$, ce qui réduit le produit dans le logarithme à celui d'Euler (nº 257), dont la valeur est $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}:\sqrt{n}$. Il vient donc, pour déterminer C,

$$\operatorname{Log}\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}=\operatorname{Log}\frac{\mathrm{C}}{n},\qquad \text{d'où}\qquad \mathrm{C}=\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

On obtient ainsi la *relation de Gauss*.

$$(19)\qquad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}}}.$$

En particulier, si $n=2$, on retrouve la formule (**11**). On peut, au moyen de la formule (**19**), en donnant succesivement à n les valeurs 3, 5, 7, 11,.. restreindre de plus en plus l'intervalle dans lequel le calcul direct de $\Gamma(a)$ est nécessaire.

262. Expression de D^2 Log $\Gamma(a)$ en série de fractions. — Changeons x en e^{-x} dans la formule de Gauss (**18**) ; il vient

$$\text{D Log }\Gamma(a)+\text{C}=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx\,;$$

et, en dérivant encore une fois, ce qui se fait sous le signe (n° 87),

$$\text{D}^2\text{ Log }\Gamma(a)=\int_0^\infty \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Dans cette intégrale, substituons le développement

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_0^{n-1}e^{-kx}+\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}=\sum_0^{n-1}e^{-kx}+\theta\,\frac{e^{-(n-1)x}}{x},$$

(θ étant compris entre 0 et 1, car le dénominateur $1-e^{-x}=e^{-x}(e^{x}-1)$ est $>xe^{-x}$) ; il vient

$$\text{D}^2\text{ Log }\Gamma(a)=\sum_0^{n-1}\int_0^\infty xe^{-(k+a)x}\,dx+\theta\int_0^\infty e^{-(a+n-1)x}\,dx$$
$$=\sum_0^{n-1}\frac{1}{(a+k)^2}+\frac{\theta}{a+n-1}$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient la série absolument et *uniformément* convergente :

$$(20)\qquad \text{D}^2\text{ Log }\Gamma(a)=\sum_0^\infty\frac{1}{(a+k)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\cdots$$

263. Formule de Weierstrass : Développement de $1:\Gamma(a)$ en produit de facteurs primaires. — Intégrons l'équation (**20**) de 1 à a ; il vient, puisque la constante d'Euler $\text{C}=-\Gamma'(1)$,

$$\text{D Log }\Gamma(a)+\text{C}=\sum_0^\infty\left(\frac{1}{1+n}-\frac{1}{a+n}\right)$$

et, en intégrant encore une fois de 1 à a,

$$(21)\qquad \text{Log }\Gamma(a)+\text{C}(a-1)=\sum_0^\infty\left(\frac{a-1}{1+n}-\text{Log}\frac{a+n}{1+n}\right)$$

Si l'on change a en $a+1$, on peut écrire, plus simplement,

$$\text{Log }\Gamma(a+1)+\text{C}a=\sum_1^\infty\left(\frac{a}{n}-\text{Log}\frac{a+n}{n}\right)$$

Revenons des logarithmes aux nombres ; nous obtenons la *formule de Weierstrass*

$$(22) \qquad \frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}$$

Les facteurs de ce produit infini sont ce que Weierstrass appelle des *facteurs primaires*. Ce produit peut servir de point de départ pour étendre la définition de $\Gamma(a)$ aux valeurs imaginaires du paramètre. Nous ne nous occuperons pas de cette question pour le moment. Cette extension peut aussi se faire au moyen d'une expression de $\Gamma(a)$ en produit infini, expression trouvée par Euler et retrouvée par Gauss, que nous allons faire connaître.

264. Formule d'Euler : Expression de $\Gamma(a)$ en produit infini. — Débarassons la formule (**21**) de C, en faisant $a = 2$ dans cette formule, puis soustrayant de la formule (**21**) la formule ainsi obtenue multipliée par $(a - 1)$; il vient

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \sum_0^\infty \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{2+n}{1+n} - \operatorname{Log} \frac{a+n}{1+n} \right]$$

Effectuons la somme des termes depuis $n = 0$ jusque $n = m - 2$; la relation précédente peut s'écrire

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \left[(a-1) \operatorname{Log} m + \sum_0^{m-2} \operatorname{Log} \frac{1+n}{a+n} \right]$$

et, en revenant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma(a) = \lim_{m=\infty} m^{a-1} \frac{1.2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-2)}$$

Multiplions encore par le facteur $m : (a + m - 1)$, qui tend vers l'unité ; il vient, sous une forme plus commode,

$$(23) \qquad \Gamma(a) = \lim_{m=\infty} m^a \frac{1.2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}.$$

C'est la formule obtenue par Euler.

§ 5. Les fonctions $\operatorname{Log} \Gamma(a)$ et $\operatorname{Log} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

Formules asymptotiques.

265. Expression $\operatorname{Log} \Gamma(a)$ par une intégrale définie. — Rappelons la formule de Cauchy (**16**), que nous écrirons comme il suit :

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^1 + \int_1^\infty \left[e^{-y} - (1+y)^{-a} \right] \frac{dy}{y}.$$

Le second membre est ainsi décomposé en deux intégrales, dont la seconde, qui est à limite infinie, est seule *généralisée*. Mais cette intégrale converge *uniformément* pourvu que a reste supérieur à un nombre positif ε, car elle est la différence de deux autres :

$$\int_1^\infty e^{-y}\frac{dy}{y} - \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^a y},$$

dont la première est indépendante de a et la seconde *uniformément convergente* (son élément décroissant quand a augmente).

Multiplions donc l'équation de Cauchy par da et intégrons de 1 à a ($a > 0$) ; on peut intégrer sous le signe (la convergence étant uniforme) et l'on trouve l'intégrale *uniformément convergente* (n° 85)

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-y} - \frac{(1+y)^{-1}-(1+y)^{-a}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]\frac{dy}{y}.$$

Si $a = 2$, on a, en particulier,

$$0 = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{(1+y)^{-2}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]dy.$$

Multiplions par $(a-1)$ et soustrayons de l'équation précédente ; il vient

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[\frac{a-1}{(1+y)^2} - \frac{(1+y)^{-1}-(1+y)^{-a}}{y}\right]\frac{dy}{\operatorname{Log}(1+y)}$$

et, en posant $\operatorname{Log}(1+y) = x$, d'où $y = e^x - 1$,

$$\int_0^\infty \left[(a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}$$

Enfin en changeant encore x en $-x$, nous obtenons l'intégrale cherchée

$$(24)\qquad \operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax}-e^x}{e^x-1} - (a-1)e^x\right]$$

et les changements de variables n'ont pas altéré le caractère de convergence uniforme pour $a > \varepsilon$.

Remarque. — En multipliant l'expression précédente par da et en intégrant de a à $a+1$ sous le signe (ce qui est permis, la convergence étant uniforme) on obtient une expression utile de l'*intégrale de Raabe* :

$$(25)\qquad \mathrm{I} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x-1} - \left(a-\frac{1}{2}\right)e^x\right].$$

On a d'ailleurs, comme on le sait (nº 257), sous forme finie,

$$I = \int_a^{a+1} \text{Log}\,\Gamma(a)da = a(\text{Log}\,a - 1) + \text{Log}\sqrt{2\pi}.$$

266. Fonction de Binet. — Soustrayons la formule (25) de (24) et ajoutons membre à membre avec

$$\frac{1}{2}\text{Log}\,a = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2}\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^x}{2}\frac{dx}{x};$$

tous les termes qui ne contiennent pas le facteur e^{ax} se détruisent sous le signe $\int$ et il vient

$$(26)\quad \begin{cases} \text{Log}\,\Gamma(a) - I + \dfrac{\text{Log}\,a}{2} = \displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)e^{ax}dx \\ f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette formule est une fonction de a ; on l'appelle *fonction de Binet* et on la désigne par $\varpi(a)$. On a donc

$$(27)\qquad \varpi(a) = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{ax}dx.$$

En remplaçant dans la formule (26) l'intégrale I par sa valeur rappelée à la fin dn nº précédent, on obtient la formule

$$(28)\quad \text{Log}\,\Gamma(a) = \text{Log}\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\text{Log}\,a - a + \varpi(a).$$

Quand a tend vers l'infini, $\varpi(a)$ tend vers 0, de sorte qu'en négligeant $\varpi(a)$ dans la formule précédente, on obtient la valeur asymptotique de Log $\Gamma(a)$. Mais nous allons examiner, dans le nº suivant, les formules d'approximation de $\varpi(a)$.

267. Série et formule de Stirling. — Dans l'intégrale (27), remplaçons $f(x)$ par le développement trouvé au nº 248 (form. 4) $(0 < \theta < 1)$

$$(29)\quad f(x) = \frac{B_2}{2!} + \frac{B_4 x^2}{4!} + \cdots + \frac{B_{2n-2}x^{2n-4}}{(2n-2)!} + \theta\frac{B_{2n}x^{2n-2}}{(2n)!};$$

observons que chaque terme s'intègre par la formule

$$\int_{-\infty}^0 x^{2k}e^{ax}dx = \int_0^\infty x^{2k}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(2k+1)}{a^{2k+1}} = \frac{(2k)!}{a^{2k+1}}$$

et que l'on peut, sans changer la signification générale de θ, en vertu

du théorème de la moyenne, faire sortir θ du signe $\int$, nous obtenons la *série de Stirling*, avec l'expression du reste R,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\varpi(a) = \frac{B_2}{1.2}\frac{1}{a} + \frac{B_4}{3.4}\frac{1}{a^3} + \cdots + \frac{B_{2n-2}}{(2n-1)(2n-2)}\frac{1}{a^{2n-3}} + R \\ &R = \theta\frac{B_{2n}}{(2n-1)2n}\frac{1}{a^{2n-1}} \qquad (0 < \theta < 1) \end{aligned}\right.$$

En particulier, en faisant $n = 1$, la série se réduit à R ; et il vient, B_2 étant égal $\frac{1}{6}$,

$$(31)\qquad \varpi(a) = \theta\frac{B_2}{2a} = \frac{\theta}{12a}.$$

Si l'on remplace $\varpi(a)$ par cette expression dans la formule (**28**), on obtient la *formule de Stirling* :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{Log}\Gamma(a) = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} a - a + \frac{\theta}{12a} \\ &\Gamma(a) = \sqrt{2\pi}\, a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a+\frac{\theta}{12a}} \end{aligned}\right.$$

Lorsque a est égal à un entier m, cette formule, multipliée par m, s'écrira sous la forme

$$1.2.3...m = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta}{12m}},$$

résultat qui a une grande importance dans le calcul des probabilités.

268. Remarques sur la série de Stirling. — La série (**30**) porte le nom de *Stirling* qui l'a considérée le premier, mais sans faire connaître l'expression du reste. Celle-ci est due à *Cauchy*. La série de Stirling prolongée indéfiniment est divergente, quel que soit le nombre positif a, car, en recourant à l'expression (**3**) donnée au n° 248 des nombres de Bernoulli, on reconnaît facilement que son terme général croît au delà de toute limite avec n.

Mais il est très remarquable que la série de Stirling, malgré sa divergence, fournisse un procédé très exact et très commode pour le calcul de $\varpi(a)$; et l'approximation que l'on peut obtenir par cette voie est d'autant plus grande que a est plus considérable. Effectivement, cette série est ce qu'on nomme une série *pseudo-convergente*. Si a est considérable, les termes commencent par décroître très rapidement au début de la série, et la formule (**30**) montre que l'erreur commise

est de même signe et inférieure en valeur absolue au premier terme négligé. On aura donc la plus grande approximation possible en arrêtant la série au terme qui précède le terme minimum et ce terme minimum sera lui-même une limite de l'erreur commise.

269. Valeur asymptotique de $\mathrm{D}\operatorname{Log}\Gamma(a)$. — Si l'on dérive les formules (**27**) et (**28**), on en tire

$$(33)\quad \begin{cases} \mathrm{D}\operatorname{Log}\Gamma(a) = \operatorname{Log} a - \dfrac{1}{2a} + \varpi'(a) \\ \varpi'(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x).xe^{ax}dx \end{cases}$$

En remplaçant dans cette intégrale $f(x)$ par son développement (**29**), il vient, comme plus haut, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\varpi'(a) = -\frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} - \cdots - \frac{B_{2n-2}}{(2n-2)a^{2n-2}} - \frac{\theta B_{2n}}{2na^{2n}}$$

Ce résultat coïncide avec celui qu'on obtiendrait en dérivant directement la série de Stirling. Cette nouvelle série est *pseudoconvergente* comme celle de Stirling et elle convient de la même manière au calcul approché de $\varpi'(a)$ quand a est grand.

Les formules précédentes fournissent le moyen le plus simple de calculer la constante C d'Euler. On tire de la formule établie au nº 260, et pour m entier,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \mathrm{D}\operatorname{Log}\Gamma(m)$$

Il suffit de choisir m suffisamment grand et d'évaluer $\mathrm{D}\operatorname{Log}\Gamma(m)$ par les formules précédentes ; on obtiendra C avec une approximation aussi grande que l'on voudra. Par exemple, en faisant $m = 10$ et en prenant les six premiers termes du développement de $\varpi'(m)$, on obtient déjà C avec quinze décimales exactes. [1]

270. Valeur asymptotique de $\operatorname{Log}\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$. Si l'on remplace a par $\left(a + \frac{1}{2}\right)$ dans la formule (**24**) et qu'on soustraie l'équation ainsi obtenue de (**25**), tous les termes qui ne contiennent pas e^{ax} en facteur sous le signe d'intégration se détruisent encore et il vient

[1] Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, t. II, 1877, p. 228.

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{I} - \mathrm{Log}\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{F}(x)\, e^{ax}\, dx \\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x} - 1}\right) \end{cases}$$

Nous poserons

$$\varpi_1(a) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{F}(x)\, e^{ax}\, dx\,;$$

alors, en remplaçant I par sa valeur, nous obtenons

$$(35)\qquad \mathrm{Log}\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = a\,(\mathrm{Log}\, a - 1) + \mathrm{Log}\,\sqrt{2\pi} - \varpi_1(a)$$

Si a augmente indéfiniment, $\varpi_1(a)$ tend vers 0, donc *l'intégrale de Raabe est la valeur asymptotique de* $\mathrm{Log}\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

271. Relation entre $\varpi(a)$ et $\varpi_1(a)$. — Cette relation se tire de la formule de Legendre (nº 256) :

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a),$$

d'où

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(a) + \mathrm{Log}\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{Log}\,\sqrt{\pi} - (2a - 1)\,\mathrm{Log}\,2 + \mathrm{Log}\,\Gamma(2a).$$

Remplaçons $\mathrm{Log}\,\Gamma(a)$ et $\mathrm{Log}\,\Gamma(2a)$ par leurs valeurs tirées de la formule (**28**), puis $\mathrm{Log}\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$ par sa valeur tirée de (**35**). Il restera, après la suppression des termes qui se détruisent,

$$(36)\qquad \varpi_1(a) = \varpi(a) - \varpi(2a).$$

272. Intégrales de Schaar. — Les fonctions $\varpi(a)$ et $\varpi_1(a)$ peuvent s'exprimer par des intégrales de différentielles *rationnelles par rapport à a*. Ces formules très remarquables sont dues à Schaar et nous allons les faire connaître.

Considérons d'abord $\varpi(a)$. La fonction $f(x)$ de la formule (**26**) a été développée en série de fractions (nº 245) ; on a trouvé

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{x^2 + 4k^2\pi^2}$$

Si l'on porte ce développement de $f(x)$ dans l'expression (**27**) de $\varpi(a)$ et qu'on intervertisse les signes $\int$ et Σ, on trouve

$$(37)\qquad \varpi(a) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{ax}\, dx = \sum_{1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{2e^{ax}\, dx}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

Changeons dans chaque intégrale x en $\frac{2k\pi x}{a}$ et intervertissons de nouveau les signes Σ et $\int$; il vient

$$(38)\quad \varpi(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \sum_1^{\infty} \frac{e^{2k\pi x}}{k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \operatorname{Log}(1-e^{2\pi x}).$$

C'est la première formule de Schaar.

Nous avons, pour l'obtenir, interverti deux fois les signes Σ et $\int$, ce qui est légitime, parce que les séries considérées sont à termes positifs et que les résultats sont déterminés. C'est le même théorème que pour l'interversion de deux signes d'intégration (n° 75). [1]

La seconde intégrale de Schaar s'obtient par la relation (**36**) ; il vient

$$\varpi_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \operatorname{Log}(1-e^{2\pi x}) - \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{2a\,dx}{4a^2+x^2} \operatorname{Log}(1-e^{2\pi x}).$$

On change x en $2x$ dans cette première intégrale ; il vient

$$(39)\quad \varpi_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \operatorname{Log}\frac{1-e^{2\pi x}}{1-e^{4\pi x}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} \operatorname{Log}(1+e^{2\pi x})$$

ce qui est la seconde intégrale de Schaar.

273. Développement de $\varpi_1(a)$ suivant les puissances négatives de a. Formules asymptotiques de Gauss. — Si, dans les intégrales de Schaar, on substitue le développement $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - \cdots \left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^{n-1} + \theta\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n\right],$$

et si l'on intègre terme à terme, en remarquant que θ peut sortir du signe $\int$ en vertu du théorème de la moyenne, on obtiendra les développements de $\varpi(a)$ et de $\varpi_1(a)$ suivant les puissances négatives de a avec l'expression du reste. On voit, sans qu'il soit nécessaire de l'écrire, que *ce reste est de même signe et moindre en valeur absolue que le premier terme négligé.*

Les coefficients de ces développements sont exprimés ainsi par des intégrales, mais il est inutile de considérer ces intégrales, car les coefficients du développement de $\varpi(a)$ ont déjà été calculés (**30**) :

$$\varpi(a) = \frac{B_2}{1\,2}\frac{1}{a} + \frac{B_4}{3.4}\frac{1}{a^3} + \frac{B_6}{5.6}\frac{1}{a^5} + \cdots.$$

[1] Il suffit de remarquer qu'une série convergente Σu_n peut être remplacée pas une intégrale à limite infinie. Définissons, en effet, la fonction $u(x)$ comme égale à u_n dans l'intervalle de $n-1$ à n ; on aura

$$\Sigma u_n = \int_0^{\infty} u(x)\,dx.$$

et ceux du développement de $\varpi_1(a)$ s'en déduisent par la relation (**36**),

$$\varpi_1(a) = \frac{B_2}{1.2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a} + \frac{B_4}{3.4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{a^3} + \frac{B_6}{5.6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\frac{1}{a^5} + \cdots$$

Cette série est divergente, mais elle est *pseudo-convergente* comme celle de Stirling : elle convient de la même manière au calcul approché, l'erreur commise étant égale à une fraction du premier terme négligé. Ainsi, en particulier, en prenant une fraction du premier terme, on a

$$\varpi_1(a) = \theta\,\frac{B_2}{1.2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a} = \frac{\theta}{24a} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Si l'on porte cette approximation dans la formule (**35**), on obtient la *formule de Gauss*, qui est l'analogue de celle de Stirling, mais plus avantageuse,

$$(40) \qquad \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - \frac{\theta}{24a}.$$

Soit n un entier ; en faisant $a = n + \frac{1}{2}$, on obtient pour l'évaluation des factorielles la formule suivante, qui donne une approximation supérieure à celle de Stirling :

$$(41) \qquad n\,! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{24n+12}} \qquad (0 < \theta < 1)$$

§ 6. Introduction à la théorie des séries trigonométriques : Intégrales de Dirichlet. [1]

274. Remarques sur la nature des fonctions considérées. — C'est à *Dirichlet* qu'on doit la première démonstration rigoureuse des formules de Fourier. Ce grand géomètre impose aux fonctions qu'il considère certaines conditions, connues généralement sous le nom de *conditions de Dirichlet*. On dit qu'une fonction $f(x)$ satisfait à ces conditions dans un intervalle (a, b) : 1° si la fonction est *bornée* dans cet intervalle ; 2° si elle est *continue*, sauf en un nombre limité de points et 3° si sa variation ne change qu'un nombre limité de fois de sens dans l'intervalle (a, b).

On simplifie la théorie en généralisant tant soit peu ces conditions

(1) On généraliserait la théorie que nous allons exposer en considérant des fonctions *à variation bornée*, au lieu de celles du n° 274, car ces fonctions possèdent toutes les propriétés sur lesquelles nous nous appuyons, ainsi qu'on l'a montré dans le premier volume (n°s 298 et suivants).

comme nous allons le faire. Mais il convient d'abord d'étudier certaines propriétés des fonctions qui satisfont aux conditions de Dirichlet.

1° *Une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions de Dirichlet est la différence $u - v$ de deux fonctions bornées et non décroissantes dans l'intervalle (a, b) et, de plus, continues si $f(x)$ est continue.*

En effet, soient m et M les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ; on aura

$$f(x) = f(a) + \mathrm{P} - \mathrm{N},$$

P désignant la somme des accroissement successifs et N celle des diminutions de la fonction quand la variable passe de a à x. Ces quantités P et N sont essentiellement positives et non décroissantes ; N reste constant dans un intervalle où $f(x)$ croît et P constant dans un intervalle où $f(x)$ décroît. De plus, ces quantités sont finies. En effet, partageons l'intervalle (a, b) en une somme d'autres dans lesquels la variation de $f(x)$ ne change pas de sens et soit q le nombre de ces intervalles. Dans chacun d'eux, la variation de $f(x)$ coïncide avec celle de P ou avec celle de N et ne peut surpasser $\mathrm{M} - m$. Donc P et N ne peuvent supasser $q(\mathrm{M} - m)$. Donc enfin $f(x)$ est la différence de deux fonctions finies et non décroissantes $u = [f(a) + \mathrm{P}]$ et $v = \mathrm{N}$. D'ailleurs si $f(x)$ est continue, P et N le sont aussi, ce qui achève la démonstration.

2° *Une fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions de Dirichlet est aussi la différence de deux fonctions positives et non croissantes dans l'intervalle (a, b) et, de plus, continues si $f(x)$ est continue.*

En effet, soit A un nombre supérieur au maximum des fonctions u et v de la proposition précédente. On a

$$f(x) = u - v = (\mathrm{A} - v) - (\mathrm{A} - u).$$

Or $\mathrm{A} - u$ et $\mathrm{A} - v$ sont positifs et non croissants, C. Q. F. D.

C'est cette dernière propriété de la fonction $f(x)$ dont nous allons nous servir pour obtenir les théorèmes de Dirichlet, mais elle subsiste pour des fonctions plus générales. Nous avons, en effet, le théorème suivant :

La propriété 2° subsiste pour toute fonction $f(x)$ qui est la somme ou le produit de plusieurs fonctions satisfaisant aux conditions de Dirichlet.

Considérons, en effet, deux fonctions seulement $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ satisfaisant à ces conditions et soient u, v, u', v' des fonctions positives non croissantes. On aura

$$\varphi(x) = u - v, \qquad \psi(x) = u' - v'$$

et on en tire

$$\varphi + \psi = (u + u') - (v + v'), \qquad \varphi\psi = (uu' + vv') - (uv' + u'v).$$

Les seconds membres sont des différences de fonctions positives non croissantes, C. Q. F. D.

Dans le théorème suivant (n° 275), nous allons donc supposer que la fonction considérée satisfait aux conditions de Dirichlet, ou, plus généralement, qu'elle est la somme ou le produit de plusieurs fonctions satisfaisant à ces conditions. Comme ce théorème est de telle nature que, s'il est vrai pour deux fonctions, il est vrai pour leur différence, on pourra énoncer le théorème dans sa généralité et admettre dans la démonstration que la fonction considérée est positive et non croissante.

Avant d'énoncer ce théorème, faisons encore une remarque. Toute fonction $f(x)$ de la nature indiquée tend nécessairement vers une limite quand x tend vers x_0 sans que sa variation change de sens, puisqu'elle est la différence $u - v$ de deux fonctions bornées qui varient toujours dans le même sens. Nous désignerons par $f(x_0 + 0)$ cette limite quand x tend vers x_0 en décroissant, par $f(x_0 - 0)$ cette limite quand x tend vers x_0 en croissant. Dans le cas ordinaire où $f(x)$ est continue au point x_0, ces deux limites seront égales à $f(x)$. Dans le cas où x_0 sera nul, nous écrirons simplement $f(+0)$ et $f(-0)$ dour désigner les limites précédentes.

275. Théorème. — *Soit* F(α) *une fonction de* α *satisfaisant aux conditions du n° précédent dans l'intervalle* (0, *b*), *on aura, b étant supposé* > 0,

$$\lim_{k=\infty}\int_0^b F(\alpha)\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}(F+0). \tag{1}$$

Comme nous l'avons expliqué dans le n° précédent, nous allons supposer dans la démonstration F(α) positif et non croissant.

Posons, en abrégé,

$$I = \int_0^b F(\alpha)\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

et soit n le plus grand nombre entier de fois que $\frac{2\pi}{k}$ entre dans b ; on aura

$$I = \int_0^{n\frac{2\pi}{k}} + \int_{n\frac{2\pi}{k}}^{b} F(\alpha) \frac{\sin k\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Si k tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers 0, car la fonction sous le signe est finie et l'intervalle d'intégration tend vers 0. Donc la limite de I sera la même que celle de l'intégrale précédente, qui devient, par le changement de α en $\alpha : k$, puis par une décomposition,

$$\int_0^{2n\pi} = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \cdots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} F\left(\frac{\alpha}{k}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Tous les termes de cette somme sont positifs. En effet, dans chacun d'eux, les éléments $\sin \alpha d\alpha$ sont deux à deux égaux et de signes contraires : positifs dans la première moitié et négatifs dans la seconde moitié de l'intervalle d'intégration. Mais comme le facteur positif $F\left(\frac{\alpha}{k}\right)\frac{1}{\alpha}$ est décroissant, donc plus grand dans la première moitié qne dans la seconde, les éléments positifs de chaque intégrale sont prépondérants et donnent leur signe à chaque terme.

Observons encore que le nombre des termes de la somme précédente augmente indéfiniment avec k et que, par conséquent, quelque grand que soit le nombre positif p supposé fixe, la limite de I surpassera celles des p premiers termes de cette somme. Nous obtenons ainsi une première inégalité

$$\text{(A)} \quad \lim I > \lim \int_0^{2p\pi} F\left(\frac{\alpha}{k}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = F(+0) \int_0^{2p\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Pour obtenir une inégalité de sens contraire, écrivons

$$I = \int_0^{(2n-1)\frac{\pi}{k}} + \int_{(2n-1)\frac{\pi}{k}}^{b} F(\alpha) \frac{\sin k\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Quand k tend vers l'infini, on peut négliger le dernier terme comme dans le cas précédent. Ensuite, en changeant α en $\alpha : k$, on voit que la limite de I sera la même que celle de la somme

$$\int_0^{(2n-1)\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{3\pi} + \int_{3\pi}^{5\pi} + \cdots + \int_{(2n-3)\pi}^{(2n-1)\pi} F\left(\frac{\alpha}{k}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Cette fois, tous les termes sont *négatifs* à partir du second, car $\sin \alpha$

est négatif dans la première moitié de l'intervalle d'intégration et positif dans la seconde. Bornons donc la somme à ses p premiers termes, on aura, p étant aussi grand qu'on veut mais fixe par rapport à k,

$$\text{(B)}\quad \lim \mathrm{I} < \lim \int_0^{(2p-1)\pi} \mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{k}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \mathrm{F}(+0) \int_0^{(2p-1)\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Comparons les relations (A) et (B) ; on voit que I finit par rester compris entre deux expressions, qui, en supposant p suffisamment grand, diffèrent aussi peu qu'on veut de l'expression (n° 88)

$$\mathrm{F}(+0) \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \mathrm{F}(+0)\, \frac{\pi}{2}.$$

Donc I a cette expression pour limite, C. Q. F. D.

Remarque. — On peut concevoir que b et $\mathrm{F}(\alpha)$ dépendent d'un paramètre variable x. Pour que la convergence de I vers sa limite soit uniforme, il faudra que n et, par suite, p puissent être supposés aussi grands qu'on veut avec k quel que soit x et que $\mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{k}\right)$ tende uniformément vers $\mathrm{F}(+0)$. Supposons que le paramètre x varie dans un intervalle déterminé ; ces conditions seront réalisées si b ne peut pas tendre vers 0 et si $\mathrm{F}(\alpha)$ est fonction continue des deux variables α et x.

276. **Corollaire.** — *Si la fonction* $\mathrm{F}(\alpha)$ *satisfait aux conditions du n° 274 dans l'intervalle* (a, b) *et qu'on ait* $(a < 0 < b)$, *on aura*

$$\text{(2)}\qquad \lim_{k=\infty} \int_a^0 \mathrm{F}(\alpha) \frac{\sin k\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \mathrm{F}(-0)\, \frac{\pi}{2},$$

$$\text{(3)}\qquad \lim_{k=\infty} \int_a^b \mathrm{F}(\alpha) \frac{\sin k\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}[\mathrm{F}(-0) + \mathrm{F}(+0)].$$

En effet, l'équation (**2**) se ramène à (**1**) en changeant α en $-\alpha$; et l'équation (**3**) est la somme des équations (**1**) et (**2**).

Remarque. — La remarque finale du n° précédent se généralise d'elle-même. Si a et b ainsi que F dépendent d'un paramètre x qui varie dans un intervalle déterminé, la convergence des expressions précédentes vers leur limite sera *uniforme* si a et b ne peuvent pas tendre vers 0 et si F est une fonction continue de α et x.

277. **Intégrales de Dirichlet.** — Soit $\mathrm{F}(\alpha)$ une fonction qui satisfait aux conditions du n° 274 dans les intervalles où on la considère. Soient a et b deux nombres satisfaisant aux conditions :

$$-\pi < a < 0 < b < \pi\,;$$

la fonction $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle (a, b). Par conséquent, le produit $F(\alpha)\,\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ satisfait aussi aux conditions du nº 274 et l'on peut remplacer $F(\alpha)$ par ce produit dans les équations des deux nºs précédents. Il vient ainsi, puisque $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ tend vers 1 quand α tend vers 0,

$$\text{(4)} \qquad \lim_{k=\infty}\int_0^b F(\alpha)\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}F(+0)$$

$$\text{(5)} \qquad \lim_{k=\infty}\int_a^0 F(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}F(-0)$$

$$\text{(6)} \qquad \lim_{k=\infty}\int_a^b F(\alpha)\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}[F(-0) + F(+0)]$$

Ces formules ont lieu, quelle que soit la manière dont k tende vers l'infini. Supposons maintenant que k soit égal à un entier impair indéfiniment croissant $2n+1$; on aura, par le changement de α en $\pi - \alpha'$,

$$\sin(2n+1)\,\alpha = \sin(2n+1)\,(\pi - \alpha') = \sin(2n+1)\,\alpha'.$$

Par conséquent, il viendra, par la formule (4),

$$\lim_{n=\infty}\int_b^\pi F(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \lim\int_0^{\pi-b} F(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}F(\pi-0)$$

et, en ajoutant cette formule à (4),

$$\text{(7)} \quad \lim_{n=\infty}\int_0^\pi F(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}[F(+0) + F(\pi-0)]$$

Remarque. — Si a, b et F dépendent d'un paramètre x variable dans un intervalle déterminé, la convergence des intégrales (4), (5) et (6) vers leur limite sera *uniforme*, si F est fonction continue de α et de x et si les limites a et b ne peuvent tendre ni vers 0 ni vers $-\pi$ ou $+\pi$, car les conditions requises dans les remarques des deux nºs précédents seront vérifiées. La dernière condition que nous venons d'énoncer provient de la présence du facteur nouveau $\alpha : \sin\alpha$ qui devient infini pour $\alpha = -\pi$ ou $+\pi$.

278. Cas d'une fonction infinie. — Les formules précédentes n'ont

plus lieu d'une manière générale quand $F(\alpha)$ passe par l'infini ; mais elles subsisteront moyennant les restrictions suivantes : 1°) La fonction $F(a)$ ne devient infinie qu'en des points isolés de l'intervalle d'intégration ; 2°) l'intégrale de $|F(\alpha)|\,d\alpha$ est finie et déterminée dans le même intervalle ; 3°) la fonction $F(\alpha)$ satisfait aux conditions prévues précédemment dans toute portion de l'intervalle d'intégration où elle est limitée ; 4°) elle n'est pas infinie pour $\alpha = \pi$ (cette condition relative au point π n'intervenant que dans le cas de la formule 7).

La démonstration étant analogue pour toutes ces formules, nous allons montrer que la formule (1) subsiste moyennant ces hypothèses et, pour fixer les idées, nous admettrons que $F(\alpha)$ n'est infinie qu'au seul point $\alpha_1 > 0$ de l'intervalle $(0, b)$.

Remarquons d'abord que, puisque l'intégrale de $|F(\alpha)|\,d\alpha$ est supposée déterminée dans l'intervalle $(0, b)$, celle de $|F(\alpha)|\,\frac{d\alpha}{\alpha}$ le sera aussi dans toute portion de cet intervalle ne contenant pas le point 0. Donc, α_1 n'étant pas nul, on peut prendre ε assez petit pour que

$$\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} |F(\alpha)|\,\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad \text{et } a\ fortiori \qquad \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} F(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

soient en valeur absolue inférieures à un nombre positif ω donné d'avance, si petit soit-il, et cela, k restant quelconque.

Ceci posé, définissons une fonction $F_\varepsilon(\alpha)$ égale à 0 dans l'intervalle $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$ et à $F(\alpha)$ partout ailleurs. Les deux intégrales :

$$\int_0^b F(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha, \qquad \int_0^b F_\varepsilon(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

différeront entre elles de moins de ω. Mais la formule (1) s'applique à F_ε qui satisfait aux conditions requises jusqu'ici, de sorte que l'on a

$$\lim_{k=\infty} \int_0^b F_\varepsilon(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\,F_\varepsilon(+0) = \frac{\pi}{2}\,F(+0).$$

Je dis que cette équation subsiste quand on y remplace $F_\varepsilon(\alpha)$ par $F(\alpha)$, car cette substitution n'altère son premier membre que d'une quantité moindre que ω et aussi petite qu'on veut avec ε, tandis que son second membre ne dépend pas de ε. Il vient donc

$$\lim_{k=\infty} \int_0^b F(\alpha)\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\,F(+0). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 7. Séries trigonométriques (ou de Fourier).

279. Définition des séries de Fourier. Problèmes qu'elles soulèvent. — Les séries trigonométriques, qui paraissent avoir été considérées pour la première fois par Daniel Bernoulli à propos du problème des cordes vibrantes, ont pour objet d'exprimer une fonction $f(x)$ par un développement convergent dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et de la forme

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

les a et les b étant des constantes que l'on appelle les coefficients du développement.

Euler le premier a indiqué le procédé de détermination des coefficients dans un Mémoire de 1777. Rappelons d'abord que l'on a, m et n désignant des entiers différents, dont l'un peut être nul,

$$\int_0^{2\pi} \cos m\alpha \cos n\alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin m\alpha \sin n\alpha \, d\alpha = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\alpha \, d\alpha = \pi$$

et enfin, même si $m = n$,

$$\int_0^{2\pi} \cos m\alpha \sin n\alpha \, d\alpha = 0.$$

Remplaçons x par α dans (1) ; multiplions les deux membres par $\cos m\alpha \, d\alpha$ et intégrons de 0 à 2π ; il viendra, si l'on peut intégrer terme à terme,

$$(2) \qquad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

De même, en multipliant par $\sin m\alpha \, d\alpha$, on trouve

$$(3) \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, da \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Les séries (1) dont les coefficients sont déterminés de la sorte sont connues sous le nom de *séries de Fourier*. C'est, en effet, ce grand géomètre qui a montré dans sa théorie de la chaleur l'extrême importance de ces séries. C'est lui qui a affirmé le premier qu'une fonction *définie arbitrairement* pouvait être représentée par une série de la

forme (1), convergente entre 0 et 2π ; ensuite qu'une seule et même série pouvait, dans les portions successives de cet intervalle, représenter des fonctions *analytiquement distinctes*, par exemple $\sin x$ de 0 à π et $\cos x$ de π à 2π. Quoiqu'il y ait certaines restrictions à faire et que Fourier n'ait pas traité la question d'une manière rigoureuse, c'est cependant lui qui a trouvé les véritables bases de la théorie. Il convient donc de conserver à ces séries le nom de Fourier, tout en reconnaissant que les premières recherches complètement rigoureuses sont dues à Dirichlet.

Les séries de Fourier soulèvent plusieurs questions intéressantes et qui ne paraissent pas encore avoir reçu leur solution définitive : A quelle condition une fonction $f(x)$ est-elle développable en série de la forme (1) ? Si le développement est possible, les coefficients sont-ils nécessairement fournis par les formules (2) et (3) ? La série (1) dont les cœfficients sont fournis par les intégrales (2) et (3) a-t-elle pour somme $f(x)$ entre 0 et 2π ?

C'est la dernière de ces questions que nous allons traiter pour commencer.

280. Somme de la série de Fourier. — Alors même que l'on suppose $f(x)$ développable par la formule (1), la détermination des coefficients par l'intégration de la série terme à terme n'est légitime que si la série converge uniformément, ce qu'on ne sait pas, de sorte que la manière dont nous avons obtenu les formules (2) et (3) soulève les plus graves objections. Pour les écarter, nous allons porter les valeurs trouvées de a_m et b_m dans la formule (1) et chercher directement si la série ainsi formée a pour somme $f(x)$.

Soit S_m la somme des $m+1$ premiers termes de cette série ; on aura

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots+\cos m(\alpha-x)\right]f(\alpha)\,d\alpha,$$

car le terme général de la série peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,[\cos p\alpha \cos px + \sin p\alpha \sin px]\,d\alpha.$$

La somme entre crochets dans l'expression de S_m a pour valeur

$$\frac{\sin\left[(2m+1)\dfrac{\alpha-x}{2}\right]}{2\sin\dfrac{\alpha-x}{2}},$$

comme on le voit en égalant les parties réelles des deux expressions :

$$\frac{1}{2} + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \cdots + e^{m\theta i} = \frac{e^{(m+1)\theta i} - 1}{e^{\theta i} - 1} - \frac{1}{2},$$

dont la seconde peut s'écrire

$$\frac{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta i} - e^{-\frac{\theta i}{2}}}{e^{\frac{\theta i}{2}} - e^{-\frac{\theta i}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta i} - \cos\frac{\theta}{2}}{2i \sin\frac{\theta}{2}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos m\theta = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Nous avons donc

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\alpha - x}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}} f(\alpha)\, d\alpha$$

ou, en posant $\frac{\alpha - x}{2} = \gamma$,

$$(4) \qquad S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2\gamma)\, \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma}\, d\gamma.$$

Il faut donc chercher si S_m a une limite quand m augmente indéfiniment. La réponse est immédiate si $f(x)$ satisfait, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, aux conditions admises au paragraphe précédent (n° 274). En effet, en posant $F(\gamma) = f(x + 2\gamma)$; on est ramené aux intégrales du n° 277. Si $0 < x < 2\pi$, la formule (6) de ce n° donne

$$(5) \qquad S = \lim S_m = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].$$

Donc la série de Fourier est convergente et a cette expression pour somme. Cette somme sera $f(x)$ si la fonction est continue pour la valeur considérée de x. Mais, si la fonction est discontinue pour la valeur $x = x_1$, la somme de la série en ce point sera égale à la moyenne des valeurs de $f(x)$ à gauche et à droite du point x_1.

Supposons maintenant que l'on fasse $x = 0$ ou $x = 2\pi$, le résultat

sera le même, puisque tous les termes de la série prendront respectivement la même valeur. On aura, pour $x = 0$,

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} f(2\gamma)\, d\gamma$$

et, par conséquent, à la limite, par la formule (7) du n° 277,

$$(6) \qquad S = \frac{1}{2}[f(+0) + f(2\pi - 0)].$$

Si $f(x)$ est continue aux extrémités de l'intervalle $(0, 2\pi)$, on aura

$$S = \frac{1}{2}[f(0) + f(2\pi)].$$

Ce cas est assimilable au cas de discontinuité. On imagine, à cet effet, que l'on porte les longueurs x, non sur une droite, mais sur une circonférence de rayon 2π, de sorte que les points d'abscisses 0 et 2π se confondent.

281. Cas où $f(x)$ devient infinie entre 0 et 2π. — Si $f(x)$ devient infinie en un nombre limité de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ mais de façon que l'intégrale de $|f(x)|\,dx$ reste finie, les résultats du n° précédent subsistent pour toutes les valeurs de x qui ne rendent pas $f(x)$ infinie, car les formules du paragraphe précédent sur lesquelles nous nous sommes appuyés subsistent (n° 278). Mais, si x est un des points qui rendent $f(x)$ infinie, $\gamma = 0$ est un de ceux qui rendent $f(x + 2\gamma)$ infinie dans la formule (4) et les conditions requises au n° 278 n'ont plus lieu.

282. Convergence uniforme de la série de Fourier. — Il est clair que la série de Fourier, dont les termes sont des fonctions continues de x, ne peut converger uniformément dans le voisinage d'un point de discontinuité de $f(x)$; mais je dis qu'*elle converge uniformément dans tout intervalle* (a, b),

$$0 < a < b < 2\pi,$$

dans lequel $f(x)$ est une fonction continue de x.

En effet, si nous nous reportons à l'intégrale (4) qui précède, la fonction $f(x + 2\gamma)$ est une fonction continue de x et de γ dans le domaine limité aux intervalles (a, b) de x et $\left(-\frac{x}{2}, \pi - \frac{x}{2}\right)$ de γ. De plus, les limites $-\frac{x}{2}$ et $\pi - \frac{x}{2}$ de cette intégrale ne peuvent tendre ni vers 0 ni vers π. Les conditions stipulées dans la remarque du n° 277 étant réali-

sées, l'intégrale (4) (ou S_m) tend donc uniformément vers sa limite quand m tend vers l'infini ; donc la série de Fourier converge uniformément dans l'intervalle (a, b).

Supposons maintenant que $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $(0,2\pi)$ tout entier. Si $f(0)$ et $f(2\pi)$ ne sont pas égaux, la converge cessera nécessairement d'être uniforme aux deux extrémités de l'intervalle $(0, 2\pi)$, car la somme de la série sera discontinue en ces deux points. Mais nous allons démontrer la proposition suivante :

Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et reprend les mêmes valeurs aux deux extrémités de cet intervalle, la série de Fourier converge uniformément dans un intervalle quelconque.

Reprenons la série de Fourier qui représente $f(x)$ entre 0 et 2π :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Cette série converge uniformément dans toute portion de l'intervalle $(0, 2\pi)$ ne contenant pas les extrémités. Mais, comme elle est périodique de période 2π, il suffit, pour établir qu'elle converge uniformément dans tout intervalle, de montrer que la convergence est uniforme dans le voisinage de $x = 0$.

A cet effet, soit $\varphi(x)$ la somme de la série ; ce sera une fonction de période 2π, *continue pour toutes les valeurs de x*, et qui coïncide avec $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. On a ainsi, pour toutes les valeurs de x,

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

et, en changeant x en $x - \pi$,

$$(8) \quad \varphi(x-\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (-1)^m (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Considérons ce développement dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. C'est le développement de $\varphi(x-\pi)$ en série de Fourier, car les coefficients en sont bien donnés par les formules (2) et (3). On a, en effet, à cause de la périodicité de φ,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha - \pi) \cos m\alpha\, d\alpha = (-1)^m \left[\int_0^\pi \varphi(\alpha + \pi) \cos m(\alpha + \pi)\, d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_\pi^{2\pi} \varphi(\alpha - \pi) \cos m(\alpha - \pi)\, d\alpha \right]$$
$$= (-1)^m \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \cos m\alpha\, d\alpha = (-1)^m a_m.$$

et, de même,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha - \pi) \sin m\alpha\, d\alpha = (-1)^m b_m.$$

Donc, comme on l'a prouvé au début de ce numéro, le développement (8) converge uniformément dans le voisinage du point $x = \pi$ qui est au milieu de l'intervalle $(0, 2\pi)$. Cela revient à dire que le développement (7) converge uniformément dans le voisinage de $x = 0$, C.Q F.D.

Bien entendu, dans les théorèmes précédents, la fonction $f(x)$ est toujours supposée satisfaire aux conditions stipulées au nº 274.

283. Développement de $f(x)$ en série de Fourier dans un intervalle quelconque d'amplitude 2π. — On peut aussi se proposer de développer une fonction $f(x)$ en série de Fourier dans un intervalle $(A, A + 2\pi)$, autre que $(0, 2\pi)$, mais de même amplitude. Ce développement sera fourni par les formules :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ & a_m = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

En effet, ce problème se ramène au précédent en imaginant une fonction $\varphi(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ entre A et $A + 2\pi$, mais qui admette la période 2π, ce qui achève de la définir. Son développement entre 0 et 2π, sera fourni par les formules établies précédemment :

$$(10) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha.$$

Ces nouvelles valeurs de a_m et b_m coïncident effectivement avec les précédentes, car, les fonctions sous le signe $\int$ ayant pour périodes 2π, on peut faire la transformation

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha = \int_A^{A+2\pi} \varphi(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha = \int_A^{A+2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha$$

et une autre transformation analogue pour b_m.

D'autre part, le développement (10), qui est démontré dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, subsiste quel que soit x, puisque les deux membres sont périodiques. Donc il subiste, en particulier, dans l'intervalle $(A, A + 2\pi)$ où $\varphi = f$ et où il coïncide avec (9), C. Q. F. D.

En particulier, si l'on veut obtenir par les formules (9) le développement de $f(x)$ entre $-\pi$ et $+\pi$, on posera

$$(11) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha, \quad b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha$$

284. Séries de cosinus seuls ou de sinus seuls. — Nous établirons dans le paragraphe suivant que le développement de $f(x)$ en série de la forme (1) n'est possible que d'une seule manière dans un intervalle d'amplitude 2π. Mais, sans entrer dans cette question, on aperçoit de suite que, si l'on ne veut représenter $f(x)$ que dans un intervalle (A, B) d'amplitude moindre que 2π, le développement sera possible d'une infinité de manières. En effet, soit $f_1(x)$ une fonction égale à $f(x)$ entre A et B, mais quelconque en dehors de cet intervalle ; le développement de $f_1(x)$ en série de Fourier dans l'intervalle $(A, A+2\pi)$ représentera $f(x)$ dans l'intervalle (A, B), mais, comme la définition de $f_1(x)$ reste arbitraire de B à $A+2\pi$, il y aura une infinité de développements satisfaisant à cette condition.

Le raisonnement précédent permet de montrer que, si l'on se borne à l'intervalle $(0, \pi)$, le développement de $f(x)$ peut se faire à volonté en série de sinus seulement ou en série de cosinus seulement des multiples de x.

En effet, pour obtenir la série des sinus, il suffit de développer dans l'intervalle de $-\pi$ à π une fonction *impaire* $f_1(x)$ égale à $f(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. On aura, par les formules (11),

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

Mais les intégrales de $-\pi$ à 0 et de 0 à π se détruisent pour a_m et s'ajoutent pour b_m. On aura donc, dans l'intervalle $(0, \pi)$ où $f_1 = f$,

$$(12) \qquad f(x) = \sum_1^\infty b_m \sin mx, \qquad b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha$$

De même, pour obtenir la série des cosinus, on supposera que $f_1(x)$ soit *paire* et on trouvera (les b_m étant nuls)

$$(13) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_m \cos mx, \qquad a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha.$$

285. Exemples de séries de sinus. — Commençons par une remarque générale.

Les coefficients b_m du développement en série de sinus dans l'intervalle $(0, \pi)$ sont fournis par les formules

$$b_m = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha\right]$$

Supposons qu'on ait $f(x) = f(\pi - x)$; ces deux intégrales, égales au signe près, s'ajoutent si m est impair et se détruisent si m est pair. Donc le développement ne contiendra que les multiples impairs de x et l'on aura

$$(14) \quad f(x) = \sum_{0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)\,x, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha)\sin(2k+1)\alpha\, d\alpha.$$

Au contraire, si $f(x) = -f(\pi - x)$; les deux intégrales s'ajoutent quand m est pair et se détruisent quand m est impair ; le développement ne contient plus que des multiples pairs de x et l'on a

$$(15) \quad f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_{2k} \sin 2kx, \qquad b_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha)\sin 2k\alpha\, d\alpha.$$

Premier exemple. — Développons $\frac{\pi}{4}$ en série de sinus dans l'intervalles $(0, \pi)$. On a $f(x) = f(\pi - x)$. Donc le développement est fourni par la formule (14). On a

$$b_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k+1}$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$(16) \qquad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

Si l'on change x en $-x$, la série change de signe ; elle représente donc $-\frac{\pi}{4}$ entre 0 et $-\pi$. Pour $x = 0$ (point de discontinuité) tous les termes sont nuls, la série est égale à 0, C'est donc bien la moyenne des valeurs à gauche et à droite du point 0, conformément aux formules générales.

Deuxième exemple. — Développons $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en série de sinus dans l'intervalle $(0, \pi)$. On a $f(x) = -f(\pi - x)$. Donc le développement est fourni par (15). On a, en intégrant par parties,

$$b_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \sin 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k}$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$(17) \qquad \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \cdots$$

La série admettant π comme période, sa valeur sera donc connue quel que soit x.

Si l'on soustrait (**17**) de (**16**), il vient, entre 0 et π,

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

Mais, les deux membres étant impairs, le développemeut est valable dans l'intervalle de $-\pi$ à π (limites exclues).

286. Exemples de séries de cosinus. — Commençons par une remarque analogue à celle du n° précédent. Les coefficients a_m du développement en série de cosinus entre 0 et π ont pour valeur

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha\right].$$

Si $f(x) = f(\pi - x)$, ces deux intégrales se détruisent quand m est impair et s'ajoutent quand m est pair. On a donc

$$(18) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_{2k} \cos 2kx, \qquad a_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \cos 2k\alpha \, d\alpha.$$

Au contraire, si $f(x) = -f(\pi - x)$, les intégrales se détruisent quand m est pair et l'on a

$$(19) \qquad f(x) = \sum_0^{\infty} a_{2k-1} \cos (2k+1) x, \qquad a_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \cos (2k+1)\alpha \, d\alpha.$$

Premier exemple. — Développons $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en série de cosinus dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme $f(x) = -f(\pi - x)$, le développements se tire de la formule (**19**). On a, en intégrant par parties,

$$a_{2k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \cos (2k+1)\alpha \, d\alpha = \frac{2}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k+1)\alpha \, d\alpha,$$

$$a_{2k-1} = \frac{2}{(2k+1)^2\pi}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites comprises),

$$(20) \qquad \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

Le second membre est une fonction paire de x, cette formule sub-

sistera donc entre $-\pi$ et $+\pi$ à condition d'y remplacer dans le premier membre $x:2$ par sa valeur absolue.

Deuxième exemple. — Développons $\sin x$ en série de cosinus entre 0 et π. Comme $f(x) = f(\pi - x)$, il faut faire usage de la formule (**18**). On a

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \cos 2k\alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2k+1)\alpha - \sin(2k-1)\alpha] d\alpha$$

$$a_{2k} = \frac{-4}{\pi(2k+1)(2k-1)}, \qquad a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{4}{\pi}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites comprises),

$$(21) \quad \sin x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \frac{\cos 6x}{5.7} - \cdots\right]$$

Le second membre admet la période π ; cette relation subsistera donc pour toutes les valeurs de x, à condition d'y remplacer $\sin x$ par sa valeur absolue.

Troisième exemple. — Développons maintenant en série de cosinus dans l'intervalle $(0, \pi)$ la fonction $\text{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$, qui devient infinie pour $x = 0$ dans les conditions prévues au nº 281. On a d'abord

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}\,(2\sin\alpha)\, d\alpha$$

et, en remplaçant $2\sin\alpha$ par $\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha.$$

Soustrayons cette équation du double de la précédente, on en tire

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 0,$$

car ces deux intégrales se détruisent (la seconde se ramène à la première en substituant $\pi - \alpha$ à α).

Ensuite, en intégrant par parties et en ayant égard à la formule de décomposition du n° 280, savoir

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots \cos m\alpha = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

il vient, pour $m = 1, 2, \ldots$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\alpha \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = -\frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin m\alpha \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

$$= -\frac{1}{2m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha - \frac{1}{2m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha = -\frac{1}{m}.$$

En définitive, on a, dans l'intervalle $(0, \pi)$,

$$(22) \qquad -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \cdots$$

Si l'on remplace le premier membre par $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)$, les deux membres seront des fonctions paires de x de période 2π et la formule subsistera quel qne soit x.

§ 8. Théorème de Cantor :

Unité du développement trigonométrique.

287. Exposé de la question. Simplification du problème. — La détermination des cœfficients du développement

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

par des intégrations (n° 279) est légitime pourvu que la série soit uniformément convergente dans l'intervalle de 0 à 2π. Donc la fonction $f(x)$ ne peut être représentée que d'une seule manière par un développement uniformément convergent entre 0 et 2π et ce développement est celui de Fourier.

Mais, si on laisse de côté l'hypothèse de la convergence uniforme, on peut se demander s'il n'existe pas, pour représenter $f(x)$ entre 0 et 2π, un développement trigonométrique différent de celui de Fourier. C'est

Cantor qui a démontré le premier qu'il n'en existait pas d'autre. Mais, pour faire cette démonstration, il faut imposer certaines restrictions à $f(x)$. Ce sont celles que nous avons définies précédemment ; nous supposerons donc que $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet ou, plus généralement, se décompose en un produit ou une somme de fonctions qui les vérifient. Plus généralement encore, $f(x)$ pourra devenir infinie en un nombre limité de points, mais de la manière qui a été précisée au nº 281.

Cela posé, supposons que l'on ait

$$f(x) = \frac{1}{2} a'_0 + \Sigma (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx)$$

pour toutes les valeurs de x entre 0 et 2π, sauf pour un nombre limité d'entre elles, par exemple toutes celles qui rendent la fonction discontinue. Je dis que ce développement coïncide avec celui de Fourier. Pour le prouver, je retranche les deux développements l'un de l'autre et j'obtiens

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \Sigma (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) = 0$$

pour toutes les valeurs de x entre 0 et 2π, sauf peut-être pour un nombre limité d'entre elles. Il suffira d'établir que cette relation ne peut avoir lieu que si tous les α et tous les β sont nuls.

Cette démonstration s'appuie sur trois théorèmes préliminaires, deux de Riemann et un de M. Schwarz que nous allons d'abord démontrer.

288. Premier théorème de Riemann. — Considérons la série

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2} a_0 + \Sigma (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

ou, si pour abréger, nous posons

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad A_m = a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

la série

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_m + \cdots$$

Supposons que a_m et b_m soient infiniment petits pour m croissant à l'infini. Formons la série

$$\text{(2)} \qquad F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \cdots - \frac{A_m}{m^2} - \cdots,$$

que l'on déduit de la première en intégrant deux fois chaque terme. Cette série sera uniformément convergente dans tout intervalle, car, A_m ne pouvant surpasser en valeur absolue une quantité positive fixe A, les

termes de la série seront inférieurs aux termes correspondants de la série positive convergente

$$A\frac{\pi^2}{2} + A + \frac{A}{2^2} + \frac{A}{3^2} + \cdots + \frac{A}{m^2} + \cdots$$

Donc la série (2) a pour somme une fonction $F(x)$ qui est continue pour toutes les valeurs de x.

Riemann considère le rapport

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

et énonce le théorème suivant :

Théorème. — *Si la série* (1) *est convergente et a pour somme $f(x)$ pour une valeur particulière de x, le rapport précédent tend vers $f(x)$ quand α tend vers* 0.

Observons les relations

$$\begin{aligned}\cos n(x+2\alpha) - 2\cos nx + \cos n(x-2\alpha) &= 2\cos nx\,(\cos 2n\alpha - 1)\\ &= -4\cos nx \sin^2 n\alpha,\\ \sin n(x+2\alpha) - 2\sin nx + \sin n(x-2\alpha) &= -4\sin nx \sin^2 n\alpha\,;\end{aligned}$$

nous pourrons écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}\\ &= A_0 + A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \cdots + A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + \cdots\end{aligned}\right.$$

Puisque la série $A_0 + A_1 + \ldots$ converge vers $f(x)$ pour la valeur considérée de x, on peut faire

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1} = f(x) + \varepsilon_n$$

et à tout nombre δ donné mais aussi petit qu'on veut, on peut faire correspondre un nombre m tel qu'on ait

$$|\varepsilon_n| < \delta, \qquad \text{si} \qquad n \geqslant m.$$

Prenons maintenant α assez petit pour que $m\alpha$ soit $< \pi$; transformons par les substitutions

$$A_0 = f(x) + \varepsilon_1, \qquad A_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n,$$

la série du second membre de (3) dans la suivante :

$$(4)\qquad f(x) + \sum_1^\infty \varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

et partageons cette nouvelle série en trois parties : dans la première, n croitra de 1 à m ; dans la seconde de $m+1$ au plus grand entier s contenu dans $\frac{\pi}{\alpha}$; dans la troisième de $s+1$ à ∞.

La *première partie* se compose d'un nombre invariable m de termes qui tendent tous vers 0 avec α et elle tend elle-même vers 0 avec α.

La *deuxième partie* est moindre que

$$\sum_{n=m+1}^{s} \delta \left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right] = \delta\left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right],$$

car les différences entre crochets dans chaque terme de (4) sont positives ($\sin x : x$ décroissant de $x=0$ à $x=\pi$ et $s\alpha$ étant $<\pi$). Donc la seconde partie est aussi petite qu'on veut avec δ.

Dans la *troisième partie*, le terme général se décomposera en deux parties, d'abord

$$\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

et ensuite [eu égard à $\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$]

$$\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right] = -\varepsilon_n \frac{\sin(2n-1)\alpha}{n^2\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Sous cette forme, il est clair que le terme général est plus petit que

$$\delta\left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} - \frac{1}{n^2\alpha^2}\right] + \frac{\delta}{n^2\alpha} < \frac{\delta}{\alpha^2}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] + \frac{\delta}{\alpha}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$$

et, par suite, la somme de $s+1$ à ∞ est plus petite que

$$\frac{\delta}{s^2\alpha^2} + \frac{\delta}{s\alpha}.$$

Enfin, comme s est $> \frac{\pi}{\alpha} - 1$, elle sera moindre que

$$\delta\left[\frac{1}{(\pi-\alpha)^2} - \frac{1}{\pi-\alpha}\right];$$

elle est donc aussi petite que l'on veut avec δ.

L'expression (4) diffère donc aussi peu que l'on veut de $f(x)$ à condition de rendre α suffisamment petit. Le théorème est démontré.

289. **Deuxième théorème de Riemann.** — *Le quotient*

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{2\alpha}$$

tend vers 0 *avec* α, *et cela pour toutes les valeurs de* x, *même pour celles qui rendraient la série* $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$ *divergente.*

En effet, ce quotient s'exprime par la série

$$2\alpha \sum_0^\infty A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

Partageons-la en trois parties : Dans la première n variera de 0 jusqu'à un nombre m tel que, pour $n \geqslant m$, on ait $|A_n| < \varepsilon$; dans la seconde n variera de $m+1$ au plus grand entier s contenu dans $\frac{c}{\alpha}$, c désignant une constante fixe ; enfin la troisième partie comprendra le reste de la série.

La première partie donne une somme moindre que $2Q\alpha$, en désignant par Q la somme $\sum_0^m |A_n|$ qui est fixe par rapport à α ; la seconde est moindre que

$$2\alpha \sum_{m+1}^{s} \varepsilon < 2\alpha s\varepsilon < 2c\varepsilon \,;$$

enfin la troisième est moindre que

$$2\alpha \sum_{s+1}^\infty \varepsilon \frac{1}{n_2\alpha_2} < \frac{2\varepsilon}{\alpha} \sum_{s+1}^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{2\varepsilon}{\alpha s} < \frac{2\varepsilon}{c-\alpha}$$

Ces trois parties sont donc aussi petites que l'on veut avec ε et α, d'où résulte la démonstration du théorème.

290. **Théorème de M. Schwarz.** — *Toute fonction* $F(x)$ *continue dans un intervalle* (a, b) *et telle qu'on ait, pour toute valeur de* x *dans cet intervalle*,

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = 0$$

est une fonction linéaire de x [1].

Suppposons $a<b$; désignons par i le facteur ± 1, par h une constante positive et formons la fonction

$$(5) \quad \varphi(x) = i\left[F(x) - F(a) - (x-a)\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right] - \frac{h^2}{2}(x-a)(b-x).$$

[1] Si l'on présupposait l'existence de $F''(x)$, le théorème serait évident, car on aurait $F''(x) = 0$.

Cette fonction est continue dans l'intervalle (a, b) et l'on a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(x+2\alpha)-2\varphi(x)+\varphi(x-2\alpha)}{4\alpha^2}=h^2$$

Donc, si α est assez petit, l'expression

$$\varphi(x+2\alpha)-2\varphi(x)+\varphi(x-2\alpha)$$

est positive. Je dis qu'il en résulte que $\varphi(x)$ ne peut être positive pour aucune valeur de x dans l'intervalle (a, b).

En effet, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ étant nuls, $\varphi(x)$ atteindrait alors un maximum pour une valeur x_0 de x comprise entre a et b ; on aurait

$$\varphi(x_0+2\alpha)-\varphi(x_0)\leqslant 0, \qquad \varphi(x_0-2\alpha)-\varphi(x_0)\leqslant 0,$$

et la somme de ces deux différences $\varphi(x_0+2\alpha)-2\varphi(x_0)+\varphi(x_0-2\alpha)$ ne serait pas positive.

Donc $\varphi(x)$ est négative ou nulle dans l'intervalle (a, b). Ceci ne peut avoir lieu, le signe de i restant arbitraire, que si l'expression entre crochets dans la valeur (5) de $\varphi(x)$ est nulle. En effet, si elle n'était pas nulle, on pourrait la supposer supérieure à $\frac{h^2}{2}(x-a)(b-x)$ en prenant h assez petit et l'on pourrait choisir le signe de i de manière que $\varphi(x)$ soit positif.

Donc la fonction entre crochets est nulle dans tout l'intervalle (a, b) et l'on a

$$F(x)=F(a)+(x-a)\frac{F(b)-F(a)}{b-a},$$

c'est-à-dire que $F(x)$ est une fonction linéaire de x.

291. Démonstration du théorème de Cantor. — On suppose que l'on ait

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_1^\infty(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0$$

pour toutes les valeurs de x dans un intervalle d'amplitude 2π, sauf pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles. On ne fait aucune hypothèse sur la manière dont se comporte la série pour ces valeurs exceptionnelles. Nous remarquons que, par suite de la périodicité, cette relation aura lieu pour toutes les valeurs de x dans un intervalle quelconque, sauf pour des valeurs exceptionnelles isolées les unes des autres.

Soit x une valeur différente des valeurs singulières.

Remplaçons dans la série x par $x+\delta$ puis par $x-\delta$ et ajoutons, il viendra

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_1^\infty(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\cos n\delta=0\,;$$

et cette relation aura lieu pour toute valeur de δ, sauf pour des valeurs isolées. C'est une série trigonométrique en δ, mais qui présente ceci d'essentiel, c'est que le coefficient de cos $n\delta$ tend vers 0 pour n infini (x étant différent des valeurs singulières). Nous pouvons donc nous borner dans la démonstration du théorème de Cantor au cas où les coefficients du sinus et du cosinus tendent vers 0 pour n infini. En effet, le théorème étant démontré dans ce cas, s'applique à la série trigonométrique en δ. On aura donc, pour toutes les valeurs de n et pour toutes les valeurs de x (différentes des valeurs exceptionnelles),

$$\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx = 0 ; \qquad \text{d'où} \qquad \alpha_n = 0,\ \beta_n = 0.$$

Grâce à ces préliminaires, nous voici ramenés, pour établir le théorème de Cantor, à démontrer que, si l'on a, pour toute valeur de x (sauf des valeurs isolées),

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$

avec la condition $\lim a_n = \lim b_n = 0$, on doit en conclure que tous les coefficients a et b sont nuls. Cette démonstration est maintenant facile.

Appliquons le premier théorème de Riemann et formons la fonction $F(x)$. Celle-ci sera continue pour toutes les valeurs de x sans aucune exception. On aura, pour toutes les valeurs de x sauf pour les valeurs singulières,

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = 0.$$

Donc, d'après le théorème de M. Schwarz, la fonction $F(x)$ est une fonction linéaire de x dans l'intervalle de deux valeurs singulières. La courbe

$$y = F(x)$$

forme donc une ligne polygonale continue dont les sommets correspondent aux valeurs singulières. Considérons une telle valeur x_0 ; la fonction $F(x)$ ne cesse pas d'être continue et l'on a, en vertu du deuxième théorème de Riemann,

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_0+2\alpha) - 2F(x_0) + F(x_0+2\alpha)}{2\alpha} = 0.$$

Or, dès que α devient assez petit, les deux quotients

$$\frac{F(x_0+2\alpha) - F(x_0)}{2\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{F(x_0-2\alpha) - F(x_0)}{-2\alpha}$$

représentent les coefficients angulaires des deux côtés du polygone qui aboutissent au sommet considéré. Donc ces coefficients sont égaux et les

deux côtés dans le prolongement l'un de l'autre. Ainsi la courbe $y = F(x)$ se réduit à une droite indéfinie. Soit $y = cx + c'$ cette droite ; on aura, *pour toute valeur de x*, la relation

$$A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = cx + c',$$

d'où

$$\sum_1^\infty \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = A_0 \frac{x^2}{2} - cx - c'.$$

Le premier membre étant périodique, il faut que $A_0 = 0$ et $c = 0$. Il reste alors

$$c' + \sum_1^\infty \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = 0.$$

C'est le développement de O en série trigonométrique *uniformément convergente;* on peut donc appliquer, en toute rigueur, la méthode classique pour déterminer les coefficients et l'on trouve $c' = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 0$.

CHAPITRE VII.

Notions sur le calcul des variations et le calcul des différences.

---

§ 1. Calcul des variations.

292. Variation d'une intégrale définie. — Soient y une fonction $f(x)$ et y' sa dérivée, $F(x, y, y')$ une fonction donnée ; considérons l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx. \tag{1}$$

Pour étudier les changements que subit cette intégrale quand on modifie la fonction y et les limites x_0 et x_1, on imagine que ces changements résultent de la variation d'un ou de plusieurs paramètres. On introduit ces paramètres en raisonnant de la manière suivante :

L'équation $y = f(x)$ est, entre x_0 et x_1, celle d'un arc de courbe AB et l'intégrale (1) est prise le long de cet arc de courbe. Quand on altère y et les limites x_0, x_1, cela revient à remplacer l'arc AB par un autre arc A_1B_1. Pour étudier les changements éprouvés par l'intégrale quand on passe d'un arc à l'autre, on fait un changement de variable et l'on considère une représentation paramétrique de l'arc : on pose, t désignant la nouvelle variable indépendante et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des paramètres dont dépendent la forme et les extrémités de l'arc,

$$x = \varphi\,(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \qquad y = \psi\,(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots). \tag{2}$$

On conçoit que ces équations se réduisent à $x = x_0$, $y = y_0$ et à $x = x_1$, $y = y_1$ respectivement pour $t = 0$ et pour $t = 1$; ensuite que, pour des valeurs particulières des paramètres ($\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots 0$ par exemple), l'arc défini par les équations (2) se réduise à l'arc AB. Alors cet arc se déforme et se déplace quand on fait varier les paramètres.

On verra par la suite qu'il est généralement inutile de former

explicitement les fonctions $\varphi(t, \alpha)$, $\psi(t, \alpha)$ et que le *point de vue* que nous venons de définir importe seul pour la conduite des calculs.

Ce point de vue étant établi, les définitions se réduisent aux suivantes :

La variation de l'intégrale I *est sa différentielle totale par rapport aux paramètres* α.

La variation d'une fonction quelconque de $x, y, y', y'', \ldots$ *est sa différentielle totale par rapport aux* α.

Les *variations* se représentent avec la caractéristique δ pour les distinguer des différentielles par rapport à t que l'on appelle simplement *différentielles* et que l'on continue de représenter avec la caractéristique d. D'où la règle suivante :

Les symboles d *et* δ, *désignant des différentielles relatives à des variables indépendantes, peuvent toujours être intervertis.*

Arrivons maintenant au calcul de la variation δI de l'intégrale. Ce calcul se fait par l'application des règles générales. On prend t comme variable d'intégration ; il vient

$$I = \int_0^1 F(x, y, y') \frac{dx}{dt}\, dt$$

et, les limites étant constantes, δI se calcule par la règle de Leibnitz

$$\delta I = \int_0^1 \frac{\delta(F dx)}{dt}\, dt = \int_0^1 \frac{\delta F dx + F \delta dx}{dt}\, dt.$$

Après la substitution $\delta dx = d\delta x$, on peut faire une intégration par parties sur le second terme de l'intégrale ; et l'on trouve, en revenant à x comme variable d'intégration,

$$(3) \qquad \delta I = [F\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta F - \frac{dF}{dx}\, \delta x \right) dx.$$

Il y a lieu de transformer cette expression. Posons, en abrégé,

$$(4) \qquad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'},$$

d'où

$$\delta F = X\delta x + Y\delta y + Y'\delta y', \qquad \frac{dF}{dx} = X + Yy' + Y'y'' ;$$

il viendra

$$\delta I = [F\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx\, [Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x)].$$

Posons, pour simplifier,

(5) $$\omega = \delta y - y'\delta x;$$

il viendra, en différentiant par rapport à t,

$$d\omega = \delta dy - y'\delta dx - dy'\delta x$$

et, par la relation $\delta dy = \delta(y'dx) = \delta y'dx + y'\delta dx$,

$$d\omega = \delta y'dx - dy'\delta x,$$

(6) $$\frac{d\omega}{dx} = \omega' = \delta y' - y''\delta x.$$

Par conséquent, δI peut s'écrire sous la forme

$$\delta I = [F\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (Y\omega + Y'\omega')\, dx.$$

Cette intégrale se transforme enfin au moyen d'une intégration par parties sur le second terme, et il vient définitivement

(7) $$\delta I = [F\delta x + Y'\omega]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)\omega\, dx.$$

293. Cas où F contient deux fonctions. — Soient z une seconde fonction de x et z' sa dérivée. La variation de

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx$$

se définit et se calcule en considérant z aussi comme une fonction de la variable t et des paramètres α. On obtiendra donc δI en ajoutant aux expressions du n° précédent les termes provenant de la variation de z.

Soient $Z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $Z' = \frac{\partial F}{\partial z'}$ les expressions analogues à Y et Y' ; définissons une quantité auxiliaire ϖ, analogue à ω :

$$\varpi = \delta z - z'\,\delta x,$$

d'où

$$\varpi' = \delta z' - z''\,\delta x;$$

il faudra compléter l'expression (7) de δI comme ci-dessous :

(8) $$\left\{\begin{aligned} \delta I &= [F\,\delta x + Y'\,\omega + Z'\,\varpi]_0^1 \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)\omega + \left(Z - \frac{dZ'}{dx}\right)\varpi\right] dx. \end{aligned}\right.$$

294. Cas où F contient des dérivées d'ordre supérieur. — Les calculs du n° 292 s'étendent facilement à l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots)\, dx,$$

dans laquelle F renferme des dérivées d'ordre supérieur de y. En effet, la formule (3) subsiste et l'on a

$$\delta I = \Big[F\,\delta x\Big]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x\right) dx.$$

Si l'on pose, en abrégé,

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad Y'' = \frac{\partial F}{\partial y''}, \dots$$

la quantité $\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x$ à intégrer prend la forme

$$Y(\delta y - y'\,\delta x) + Y'(\delta y' - y''\,\delta x) + Y''(\delta y'' - y'''\,\delta x) + \cdots$$

Mais nous avons posé

$$\omega = \delta y - y'\,\delta x, \qquad \text{d'où} \qquad \omega' = \delta y' - y''\,\delta x$$

et on en conclut, en remplaçant successivement y par y', y'',...

$$\omega'' = \delta y'' - y'''\,\delta x, \qquad \omega''' = \delta y''' - y^{\text{IV}}\,\delta x, \dots$$

Il vient donc

$$\delta I = \Big[F\,\delta x\Big]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx \Big[Y\omega + Y'\omega' + Y''\omega'' + \cdots\Big]$$

On fait disparaître, par un nombre suffisant d'intégrations par parties, toutes les dérivées de ω qui figurent sous le signe $\int$ et l'on trouve ainsi l'expression définitive

$$\delta I = \left[F\,\delta x + Y'\omega + Y''\omega' - \frac{dY''}{dx}\,\omega + \dots\right]_0^1$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \dots\right] \omega\, dx.$$

Si F contenait une seconde fonction z de x, il faudrait compléter δI de termes relatifs à z comme au n° 293.

295. Cas où F dépend des valeurs de x, y, z aux limites. — Si F contient les quantités x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, il faut encore ajouter aux

expressions déjà obtenues de δI l'ensemble des termes qui proviennent des variations de ces quantités, à savoir l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \cdots \right] dx.$$

C'est donc un ensemble de termes ne dépendant que des variations aux limites.

296. Condition nécessaire de maximum ou de minimum d'une intégrale définie. — L'objet principal du calcul des variations est de déterminer les maxima et minima d'intégrales définies dont les éléments dépendent d'une ou de plusieurs fonctions inconnues.

Dans le cas le plus général, on considère l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, z, z', \ldots)\, dx.$$

La fonction F est donnée, mais les fonctions y et z de x sont inconnues. Quant aux limites x_0, x_1, et aux valeurs correspondantes de y, z, y',..., elles peuvent être soit données, soit complètement arbitraires, soit encore liées par une ou plusieurs équations. On demande de déterminer y et z et ce qui reste d'indéterminé dans les quantités aux limites de manière que l'intégrale I soit maximum ou minimum.

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes à cet effet est un problème très ardu, dans lequel nous ne voulons pas entrer. Mais le théorème suivant, qui ne donne qu'une condition nécessaire, suffit à la détermination pratique du maximum ou du minimum s'il existe :

Théorème. — *Le système des valeurs de y, z,... et des quantités aux limites qui rend l'intégrale* I *maximum ou minimum sous des conditions imposées, doit annuler la variation* δI *pour tout système de variations de x, y, z,.., et des quantités aux limites compatibles avec les conditions imposées.*

Soient, en effet, y, z,... x_0, x_1,... les valeurs qui fournissent le maximum ou le minimum cherché. Altérons infiniment peu ces valeurs en respectant les conditions imposées, et cela au moyen de la variation d'un ou de plusieurs paramètres α_1, α_2,... ; l'intégrale, considérée comme fonction de ces paramètres doit être maximum ou minimum. Donc (abstraction faite des cas de discontinuité, que nous écartons) sa différentielle totale δI est nulle.

297. Décomposition de la condition $\delta I = 0$. — Premier cas. Considérons l'intégrale, qui ne dépend que d'une fonction inconnue y,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Sa variation, fournie par la formule (7), est de la forme

$$\text{(9)} \qquad \delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\, dx,$$

où A est une fonction linéaire et homogène des variations des quantités aux limites et où l'on a $B = Y - \frac{dY'}{dx}$.

L'équation $\delta I = 0$ se décomposera en deux autres.

En effet, on peut d'abord laisser fixes les quantités aux limites, alors A est nul et il vient

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\, dx = 0.$$

Mais $\omega = \delta y - y'\delta x$ est arbitraire avec δy et δx pour chacune des valeurs de x. La relation précédente ne peut donc subsister quel que soit ω que si l'on a, pour chaque valeur de x,

$$B = Y - \frac{dY'}{dx} = 0.$$

L'équation $B = 0$ est une équation différentielle qui porte le nom d'*équation principale* et qui sert à déterminer la forme de la fonction inconnue y.

En second lieu, B étant nul, l'équation $\delta I = 0$ se réduit à

$$A = \Big[F\,\delta x + Y'\omega \Big]_0^1 = 0.$$

L'équation $A = 0$ est l'*équation aux limites.* Elle sert, comme nous le montrerons dans les exemples traités plus loin, à déterminer les constantes introduites par l'intégration de l'équation principale.

Deuxième cas. — Quand F renferme deux fonctions inconnues y et z ainsi que leurs dérivées premières, la variation de l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx$$

est donnée par la formule (8); δI est donc de la forme

$$\text{(10)} \qquad \delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} (B\,\omega + C\,\varpi)\, dx,$$

en désignant par A l'ensemble des termes aux limites et en posant $B = Y - \frac{dY'}{dx}$, $C = Z - \frac{dZ'}{dx}$.

L'équation $\delta I = 0$ se décompose immédiatement en deux autres, comme dans le premier cas : l'*équation principale*

$$B\omega + C\varpi = 0$$

et l'*équation aux limites* $A = 0$. Cette dernière sert encore à déterminer les constantes introduites par l'intégration de l'équation principale. Mais, en ce qui concerne l'équation principale, il y a deux hypothèses à examiner :

1°) Si l'on ne donne aucune relation entre x, y et z, les quantités $\omega = \delta y - y'\delta x$ et $\varpi = \delta z - z'\delta x$ sont, avec δx, δy et δz, des indéterminées indépendantes et l'équation principale se décompose en deux autres : $B = 0$, $C = 0$. Ce sont deux équations différentielles simultanées qui déterminent la forme des fonctions inconnues y et z.

2°) Si l'on donne une relation $F(x, y, z) = 0$, les variations seront liées par la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Mais, en dérivant totalement $F = 0$ par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' = 0$$

et en soustrayant de la précédente cette dernière relation multipliée par δx, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\delta y - y'\delta x) + \frac{\partial F}{\partial z}(\delta z - z'\delta x) = \frac{\partial F}{\partial y}\omega + \frac{\partial F}{\partial z}\varpi = 0.$$

Donc il existe dans ce cas une relation entre ω et ϖ et l'on ne peut plus annuler séparément le deux termes B et C de l'équation principale. Celle-ci donne, par l'élimination de ω et ϖ, la relation

$$C\frac{\partial F}{\partial y} - B\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

qui, jointe à $F(x, y, z) = 0$, déterminera la forme des fonctions inconnues y et z.

Remarque. — Nous avons supposé que F ne renfermait que des dérivées premières, ce qui simplifie les expressions de A, B et C, mais la discussion s'étend d'elle-même au cas où il y aurait des déri-

vées plus élevées. D'ailleurs ce dernier cas ne se présentera pas dans la solution des problèmes que nous poserons tout à l'heure.

298. Méthode pratique de calcul. — En pratique, il est plus commode de conduire les calculs autrement que nous venons de le faire. Reprenons les deux cas examinés ci-dessus.

Premier cas. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Prenons encore t comme variable indépendante et remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$; l'intégrale se ramènera à la forme

$$I = \int_0^1 F(x, y, dx, dy).$$

Soient respectivement X, Y, X', Y' les dérivées partielles de F par rapport à x, y, dx, dy ; il viendra

$$\delta I = \int_0^1 \delta F = \int_0^1 (X\delta x + Y\delta y + X'd\delta x + Y'd\delta y)$$

Par des intégrations par parties, on fait disparaître sous le signe $\int$ les différentielles des variations, ce qui conduit à un résultat de la forme

$$(11) \qquad \delta I = A + \int_0^1 (P\delta x + Q\delta y)$$

en désignant par A la partie tout intégrée qui ne dépend que des variations aux limites, par P et Q des coefficients indépendants des variations.

Etudions maintenant la condition $\delta I = 0$ du maximum ou du minimum. L'*équation principale* sera $P\delta x + Q\delta y = 0$ et l'*équation aux limites* $A = 0$. Mais comme δx et δy sont des indéterminées indépendantes, l'équation principale se décompose en deux autres $P = 0$ et $Q = 0$. Il y a donc surabondance d'équations pour déterminer la forme de la fonction inconnue et l'on prévoit qu'elles rentrent l'une dans l'autre. Vérifions-le.

Pour cela, comparons les deux expressions (9) et (11) de δI, elles doivent rentrer l'une dans l'autre après qu'on a remplacé dans (9) ω par $\delta y - y'\delta x$. Donc, δx et δy étant des indéterminées, leurs coefficients sont les mêmes sous les signes $\int$, il vient donc

$$P = -By'dx = -Bdy, \qquad Q = Bdx,$$

ainsi les deux équations $P = 0$ et $Q = 0$ reviennent l'une et l'autre à l'équation $B = 0$ du n° précédent et ne nous apprennent rien de plus. Il suffira d'intégrer l'une d'elles choisie à volonté.

Voici encore une remarque souvent utile.

Supposons qu'on fasse varier y seul, x et les quantités aux limites étant fixes (indépendantes des paramètres); toutes les variations autres que δy étant nulles, la formule (11) se réduit à

$$\delta I = \int_0^1 Q\,\delta y$$

et la condition $\delta I = 0$ donne $Q = 0$. De même, si l'on ne faisait varier que x seul, y et les quantités aux limites restant fixes, la condition $\delta I = 0$ conduirait à l'équation $P = 0$. On voit donc que si l'on se borne à chercher l'équation principale, on l'obtiendra en ne donnant de variation qu'à y ou bien qu'à x à son choix et en annulant toutes les variations aux limites.

Deuxième cas. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx.$$

Prenons t comme variable d'intégration et remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$ et z' par $\frac{dz}{dx}$; l'intégrale sera ramenée à la forme

$$I = \int_0^1 F(x, y, z, dx, dy, dz).$$

On en tire, avec des notations analogues aux précédentes,

$$\delta I = \int_0^1 \delta F = \int_0^1 (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta dx + Y'\delta dy + Z'\delta dz)$$

et, au moyen d'intégrations par parties, δI prend la forme

$$\delta I = A + \int_0^1 (P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z), \tag{12}$$

en désignant encore par A la partie tout intégrée qui ne dépend que des variations aux limites.

La condition $\delta I = 0$ se décompose donc dans l'*équation aux limites* $A = 0$ et dans l'*équation principale* $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$. Il y a, comme au n° précédent deux hypothèses à examiner :

1°) S'il n'existe aucune relation entre x, y, z, les variations δx, δy, δz sont des indéterminées indépendantes et l'équation principale se décom-

pose en trois autres $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Mais, en identifiant les expressions (10) et (12) de δI, on reconnait facilement que ces trois équations se réduisent à deux distinctes $B = 0$ et $C = 0$. Toutefois la considération simultanée des trois équations introduit souvent plus de symétrie dans les calculs.

2°) S'il existe une relation $F(x, y, z) = 0$, on en tire

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0. \tag{13}$$

Dans ce cas, on se sert avec avantage de la *méthode des multiplicateurs*. On multiplie l'équation précédente par λ et on l'ajoute avec $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$, il vient

$$\left(P + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Q + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y + \left(R + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z = 0.$$

En vertu de (13), il n'y a que deux des variations qui soient indépendantes dans cette relation. Si l'on choisit λ de manière à annuler le coefficient de la variation dépendante, les coefficients des deux variations indépendantes seront nuls aussi. On est donc conduit à poser

$$P + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad Q + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad R + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ces trois équations et $F = 0$ forment un système de quatre équations (se réduisant à trois distinctes seulement) qui servira à déterminer y, z et λ en fonction de x.

Remarque. — Les méthodes de calcul qui précèdent peuvent s'étendre au cas où F renferme des dérivées d'ordre supérieur y'',... il faut alors faire en plus les substitutions plus compliquées

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},\ldots$$

et, par un nombre suffisant d'intégration par parties consécutives, faire disparaître toutes les différentielles des variations. Les calculs deviennent pénibles et, dans ce cas, les méthodes du n° 297 sont préférables.

299. Problème. Surface de révolution minimum. — *On donne deux points* A *et* B *et une droite dans un plan; on demande de mener entre ces deux points la courbe qui, en tournant autour de cette droite, engendre la surface de révolution dont l'aire soit la plus petite possible,*

Prenons l'axe de révolution pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y. Soient x_0, y_0 et x_1, y_1 les coordonnées des points A et B. Appliquons la méthode du numéro précédent. Considérons x et y comme des fonctions d'une variable indépendante t, qui varie de 0 à 1 quand le point x, y décrit AB. L'intégrale à rendre minimum sera

$$\mathrm{I} = \int_0^1 y\, ds$$

et l'on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \delta ds = \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y}{ds}.$$

Calculons $\delta\mathrm{I}$; il vient successivement

$$\delta\mathrm{I} = \int_0^1 (\delta y\, ds + y\, \delta ds) = \int_0^1 \left(\delta y\, ds + y \frac{dx}{ds}\, d\delta x + y \frac{dy}{ds}\, d\delta y\right)$$
$$= \left[\frac{y(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{ds}\right]_0^1 + \int_0^1 \left[d\left(s - \frac{y dy}{ds}\right)\delta y - d\left(y\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right].$$

L'*équation aux limites* est donc

$$\left[\frac{y\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y}{ds}\right]_0^1 = 0$$

et l'*équation principale* se décompose en deux autres :

$$d\left(s - \frac{y dy}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

On sait que ces deux équations sont équivalentes et l'on peut se borner à considérer la seconde. Il vient, en l'intégrant,

$$y\, dx = \mathrm{C}\, ds = \mathrm{C}\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}, \qquad \frac{d\frac{y}{\mathrm{C}}}{\sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}} = d\frac{x}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{y}{\mathrm{C}} + \sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}\right) = \frac{x - \mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}, \qquad y = \frac{\mathrm{C}}{2}\left(e^{\frac{x-\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}} + e^{-\frac{x-\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}}\right).$$

Donc la courbe cherchée est une *chaînette* ayant l'axe de révolution pour base.

Si les points A et B sont donnés, leurs coordonnées ne recoivent pas de variations et l'équation aux limites disparaît. Les deux constan-

tes d'intégration C et C_1 se déterminent par la condition que la courbe passe pour les deux points A et B.

Supposons maintenant que les points A et B, n'étant pas donnés, soient seulement assujettis à se trouver sur deux courbes MN et PQ. Comme les déplacements des points A et B sur chacune de ces courbes ne dépendent aucunement l'un de l'autre, les variations à la limite 0 sont indépendantes de celles à la limite 1 et l'équation aux limites se décompose en deux autres :

$$dx_0\,\delta x_0 + dy_0\,\delta y_0 = 0, \qquad dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 = 0.$$

Ces relations serviront à déterminer les constantes. Elles expriment une propriété géométrique de la courbe qui fournit le minimum. La première montre que le déplacement $(\delta x_0, \delta y_0)$ du point A sur le courbe MN est perpendiculaire au déplacement (dx_0, dy_0) sur la courbe AB. La seconde s'interprête de même. Donc *la courbe, menée entre deux courbes données* MN *et* PQ, *qui engendre la plus petite surface de révolution, est une chaînette qui rencontre normalement ces deux courbes.*

C'est Meusnier vers 1776 qut a découvert la propriété de la chaînette que nous venons d'étudier.

300. Problème. Ligne la plus courte dans l'espace. — Soit à trouver la ligne la plus courte entre deux points A (x_0, y_0, z_0) et B (x_1, y_1, z_1) de l'espace. Opérons comme au n° 298 (1° du deuxième cas). Considérons x, y, z comme des fonctions d'un paramètre t qui varie de 0 à 1 le long de la ligne. L'intégrale à rendre minimum sera

$$I = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Calculons δI ; il vient

$$\delta I = \int_0^1 \delta\, ds = \int_0^1 \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds}$$

$$= \left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right)$$

Les fonctions x, y, z étant indépendantes, les variations δx, δy et δz sont indépendantes sous le signe $\int$ et l'équation principale $\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0$ se décompose en trois autres (se réduisant à deux distinctes)

$$d\frac{dx}{ds} = d\frac{dy}{ds} = d\frac{dz}{ds} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dx}{ds} = \alpha, \ \frac{dy}{ds} = \beta, \ \frac{dz}{ds} = \gamma$$

en désignant par α, β, γ trois constantes. Ces trois constantes étant les cosinus directeurs de la tangente à la courbe cherchée, on en conclut que la ligne la plus courte est une droite.

Si les points A, B sont donnés, les variations aux limites sont nulles ; l'équation aux limites disparaît et la droite est déterminée par la condition de passer par les deux points.

Supposons que les points A et B ne soient pas donnés, mais seulement assujettis à se trouver sur deux surfaces S et S′ ayant respectivement pour équations

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \psi(x_1, y_1 z_1) = 0.$$

L'équation aux limites sera

$$\left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 = 0$$

et les variations aux limites seront liées par les relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\delta z_0 = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z_1}\delta z_1 = 0.$$

Comme il n'y a pas de relations entre les variations à la limite 0 et celles à la limite 1, car les déplacements des points A et B sur S et S′ sont indépendants, l'équation aux limites se décompose en deux autres

$$dx_0\,\delta x_0 + dy_0\,\delta y_0 + dz_0\,\delta z_0 = 0, \qquad dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 = 0.$$

Ces deux équations s'interprètent géométriquement : elles expriment qu'une droite de longueur minimum entre les deux surfaces S et S′ est une perpendiculaire commune à ces deux surfaces.

301. Ligne la plus courte sur une surface. — *Soit* $F(x, y, z) = 0$ *l'équation d'une surface* S ; *on demande de tracer sur la surface, entre deux de ses points* A (x_0, y_0, z_0) *et* B (x_1, y_1, z_1), *la ligne la plus courte possible.*

Il faut encore annuler la même variation δI qu'au n° précédent ; mais, comme la ligne cherchée doit être tracée sur la surface $F(x, y, z) = 0$, les variations δx, δy et δz sont maintenant liées par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Par conséquent, l'équation principale

$$\delta x \, d \frac{dx}{ds} + \delta y \, d \frac{dy}{ds} + \delta z \, d \frac{dz}{ds} = 0$$

ne se décompose plus en trois autres. Employons la *méthode des multiplicateurs* (n° 298). En ajoutant à l'équation principale que nous venons d'écrire l'équation qui la précède multipliée par un facteur λ, on est conduit à poser les trois équations :

$$d \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ces trois équations, jointes à $F = 0$, sont les équations différentielles de la ligne cherchée.

L'équation aux limites sera

$$\left[\frac{dx \, \delta x + dy \, \delta y + dz \, \delta z}{ds} \right]_0^1 = 0.$$

Les lignes les plus courtes sur une surface s'appellent *lignes géodésiques*. On déduit des équations précédentes une propriété géométrique de ces lignes. On en tire, en effet,

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Les numérateurs sont les coefficients directeurs de la normale principale à la ligne cherchée, les dénominateurs ceux de la normale à la surface S. De là le théorème suivant :

La normale principale à une ligne géodésique coïncide en chaque point avec la normale à la surface sur laquelle cette ligne est tracée.

Si les points A et B sont donnés, la ligne géodésique sera déterminée par la condition de passer par les deux points.

Si les points A et B sont seulement assujettis à se trouver sur deux lignes L et L' tracées sur S, il faudra recourir à l'équation aux limites. Celle-ci se décompose encore dans les deux équations écrites à la fin du n° précédent et elle exprime maintenant que la ligne géodésique rencontre normalement les deux lignes L et L'.

302. Brachistochrone. — C'est la ligne que doit suivre un point pesant pour aller du point A au point B dans le temps le plus court possible. Nous allons la déterminer en supposant que la vitesse initiale est nulle.

Prenons trois axes rectangulaires, l'axe des x étant dans le sens de la pesanteur. Soient (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points A et B. La vitesse au point (x, y, z) étant $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(x - x_0)}$, le temps T du parcours AB sera

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}.$$

L'intégrale à rendre minimum sera donc

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{X}, \qquad \text{en posant} \qquad X = \sqrt{x - x_0}.$$

Calculons δI par la méthode du n° 298, mais en observant que x_0 peut varier (n° 295) ; il vient, sans difficulté, en écrivant tous les termes qui dépendent des variations aux limites sur la première ligne,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta I &= \left[\frac{dx\, \delta x + dy\, \delta y + dz\, \delta z}{X\, ds} \right]_0^1 + \frac{\delta x_0}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{X^3} \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta x \left(\frac{ds}{2X^3} + d\, \frac{dx}{Xds} \right) + \delta y\, d\, \frac{dy}{Xds} + \delta z\, d\, \frac{dz}{Xds} \right] \end{aligned} \right.$$

L'équation principale se décompose en trois autres (deux distinctes) :

$$(15) \qquad \frac{ds}{2X^3} + d\, \frac{dx}{Xds} = 0, \quad d\frac{dy}{Xds} = 0, \quad d\frac{dz}{Xds} = 0.$$

On tire des deux derniers $dy = \alpha\, Xds$ et $dz = \beta\, Xds$, en désignant par α, β des constantes. Par suite, $\beta\, dy = \alpha\, dz$ et

$$\beta y = \alpha z + \gamma,$$

ce qui prouve que la courbe cherchée est dans un plan vertical.

Forme de la courbe. Pour déterminer la nature de la courbe, prenons son plan comme plan xy et plaçons l'origine au point de départ A, ce qui réduit X à $\sqrt{x}$. La seconde équation (15) nous donnera, en appelant $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ la constante d'intégration,

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{x}{2a}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

C'est l'équation différentielle d'une *cycloïde* engendrée par un cercle de rayon a roulant sur l'axe des y. On s'en assure immédiatement par la substitution

$$x = a(1 - \cos t),$$

qui donne (x, y s'annulant avec t au point A)

$$dy = a \sin t \, dt \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = a(1 - \cos t) \, dt$$

$$y = a(t - \sin t)$$

et l'on retrouve la représentation paramétrique d'une cycloïde. La courbe cherchée est donc une cycloïde verticale, engendrée par un cercle qui roule inférieurement sur l'horizontale du point A.

Détermination des constantes. — Si les points A et B sont donnés, la cycloïde se détermine par la condition de passer par ces deux points.

Supposons que les points A et B soient seulement assujettis à se trouver respectivement sur deux courbes données MN et PQ. Les déplacements des points A et B étant alors indépendants, l'ensemble des termes à la limite 0 et la limite 1 sont nuls séparément et l'équation aux limites, à savoir A = 0, où A est la première ligne de δI dans (14), se décompose en deux autres :

$$dx_1 \, \delta x_1 + dy_1 \, \delta y_1 + dz_1 \, \delta z_1 = 0,$$

$$\delta x_0 \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{2X^3} - \left(\frac{dx}{X ds} \right)_0 \right] - \delta y_0 \left(\frac{dy}{X ds} \right)_0 - \delta z_0 \left(\frac{dz}{X ds} \right)_0 = 0.$$

La première équation exprime que la cycloïde rencontre normalement la courbe PQ au point d'arrivée B.

Faisons dans la seconde les substitutions (obtenues en intégrant les relations (15) de x_0 à x_1) :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{2X^3} = -\left[\frac{dx}{X ds} \right]_0^1, \quad \left(\frac{dy}{X ds} \right)_0 = \left(\frac{dy}{X ds} \right)_1, \quad \left(\frac{dz}{X ds} \right)_0 = \left(\frac{dz}{X ds} \right)_1;$$

elle se réduit à

$$dx_1 \, \delta x_0 + dy_1 \, \delta y_0 + dz_1 \, \delta z_0 = 0.$$

Elle exprime que la tangente à la cycloïde au point d'arrivée B est aussi normale à la tangente à la courbe MN au point de départ A.

Le problème que nous venons de traiter a été résolu par Jean Bernoulli vers 1696.

Remarque. Le problème suppose évidemment le point de départ A au moins à la hauteur de B, quand la vitesse initiale est nulle ; mais les deux points peuvent être à la même hauteur et, dans ce cas, la brachistochrone est une arcade entière de cycloïde.

303. Maxima et minima relatifs. — Il existe une autre classe de problèmes que l'on comprend sous le nom de maxima et de minima

relatifs ou de *problèmes des isopérimètres*, d'après les applications géométriques qui en ont fourni les premiers exemples. On considère une intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

et il s'agit de rendre cette intégrale maximum ou minimum, sous la condition qu'une autre intégrale, prise entre les mêmes limites,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, y, y')\, dx$$

conserve une valeur constante l.

La détermination des maxima et minima relatifs se ramène à celle des maxima et minima absolus par la règle suivante :

Règle. *Pour déterminer les maxima et minima relatifs de* I, *on désigne par k une constante inconnue et on opère comme pour déterminer les maxima et minima absolus de l'intégrale*

$$I - kV.$$

On détermine ainsi tous les éléments inconnus en fonction du paramètre inconnu k, et celui-ci se détermine lui-même au moyen de la condition $V = l$.

Pour justifier cette règle, remarquons que, dans le cas du maximum ou du minimum relatif, on doit avoir $\delta I = 0$ pour tous les systèmes de variations satisfaisant à la condition $\delta V = 0$.

En développant ces variations comme cela a été fait au n° 292 et avec les notations du n° 297, on voit donc que l'équation

$$\delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\omega\, dx = 0$$

doit être une conséquence de l'équation

$$\delta V = A_1 + \int_{x_0}^{x_1} B_1 \omega\, dx = 0,$$

les termes A et A_1 ne dépendant que des variations aux limites.

Je dis d'abord que le rapport $B : B_1$ doit demeurer constant dans tout l'intervalle (x_0, x_1). En effet, soient ξ_1 et ξ_2 deux points quelconques de cet intervalle. Annulons toutes les variations sauf dans les deux intervalles infiniment petits $(\xi_1, \xi_1 + \varepsilon)$ et $(\xi_2, \xi_2 + \varepsilon)$; il faudra que la relation

$$\delta I = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B\omega\, dx + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} B\omega\, dx = 0$$

soit une conséquence de la relation.

$$\delta V = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B_1\omega\, dx + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} B_1\omega\, dx = 0.$$

Dans ces relations ω est une indéterminée fonction de x. Remplaçons-la par une autre indéterminée α en posant d'une part $\omega = \alpha : B_1$ entre ξ_1 et $\xi_1 + \varepsilon$ et de l'autre $\omega = -\alpha : B_1$ entre ξ_2 et $\xi_2 + \varepsilon$. Il faudra que la relation

$$(1) \qquad \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\alpha\, dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\alpha\, dx$$

soit une conséquence de la relation

$$(2) \qquad \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\, dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \alpha\, dx.$$

Supposons l'indéterminée α positive et appliquons le théorème de la moyenne de manière à faire sortir $B : B_1$ hors du signe $\int$ dans la relation (1). A cet effet, soient respectivement m_1 et m_2 des valeurs moyennes de $B : B_1$ dans le premier et le second des intervalles d'intégration. La relation (1) pourra se mettre sous la forme

$$m_1 \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\, dx = m_2 \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \alpha\, dx,$$

ce qui donne $m_1 = m_2$, eu égard à (2). Mais, ε étant infiniment petit, les quantités m_1 et m_2 tendent respectivement vers les valeurs de $B : B_1$ aux points ξ_1 et ξ_2. Donc ces dernières valeurs sont égales et le rapport $B : B_1$ est constant. Soit k sa valeur ; on aura

$$B - kB_1 = 0.$$

Ceci posé, il faut que l'équation $\delta I - k\delta V = 0$, qui se réduit à

$$A - kA_1 = 0,$$

soit aussi une conséquence de $\delta V = 0$; mais, comme elle ne contient plus ω, elle doit avoir lieu indépendamment de $\delta V = 0$. On trouve donc les conditions $B - kB_1 = 0$ et $A - kA_1 = 0$ qui sont celles du maximum ou du minimum absolu de l'intégrale $I - kV$. La règle est ainsi justifiée.

304. Problèmes de maxima et de minima relatifs. — PREMIER PROBLÈME. *Etant donnés deux points* A *et* B *dans un plan, trouver,*

parmi toutes les courbes ayant même longueur $2l$, celle pour laquelle le segment compris entre l'arc AB *et sa corde est maximum.*

Prenons la droite AB pour axe des x et la perpendiculaire au milieu de AB pour axe des y. En supposant que $AB = 2a$, il faut rendre maximum l'intégrale

$$S = \int_{-a}^{+a} y\,dx, \quad \text{sous la condition} \quad \int_{-a}^{+a} ds = 2l.$$

D'après la règle, cherchons le maximum absolu de l'intégrale

$$I = \int_{-a}^{+a} (y\,dx - k\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Les points A et B étant donnés, les variations aux limites seront nulles. Il vient ainsi

$$\delta I = \int_{-a}^{+a} \left(\delta y\,dx + y\,d\,\delta x - k\,\frac{dx\,d\,\delta x + dy\,d\,\delta y}{ds} \right)$$

$$= \int_{-a}^{+a} \delta y\,d\left(x - k\,\frac{dy}{ds}\right) + \delta x\,d\left(y - k\,\frac{dx}{ds}\right)$$

On doit donc annuler les coefficients de δx et de δy, ce qui fournit deux formes équivalentes de l'équation principale (n° 298). On obtient ainsi immédiatement les deux intégrales premières :

$$x - C = k\,\frac{dy}{ds}, \qquad y - C_1 = k\,\frac{dx}{ds},$$

D'où, en ajoutant les carrés,

$$(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = k^2.$$

La courbe cherchée est un cercle.

Pour $y = 0$, on doit avoir $x = \pm a$, donc $C = 0$ et $C_1 = \pm\sqrt{k^2 - a^2}$, ce qui correspond aux deux solutions symétriques par rapport à AB. Enfin, il faut faire en sorte que l'arc soit égal à $2l$. Soit 2θ l'angle au centre sous-tendu par AB ; on doit avoir $\theta k = l$ et $k \sin\theta = a$. Eliminant θ, on a, pour déterminer k, l'équation transcendante

$$\frac{\sin\dfrac{l}{k}}{\dfrac{l}{k}} = \frac{a}{l}.$$

Remarque. En supposant a infiniment petit, le problème revient à trouver, parmi toutes les courbes fermées de même périmètre, celle qui enferme la plus grande aire. La solution est donc un cercle du périmètre donné $2l$.

Deuxième problème. *Parmi toutes les courbes isopérimètres tracées entre deux points* A *et* B *dans le plan xy, trouver celles qui, en tournant autour de l'axe des x, engendrent les surfaces de révolution d'aire maximum ou minimum ; ou, ce qui revient au même, celles dont le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible.*

On doit rendre maximum ou minimum $\int y\,ds$ sous la condition $\int ds = l$, ce qui, selon la règle, conduit à poser

$$\delta \int (y - k)\,ds = 0.$$

Cette équation ne diffère de celle traitée au n° 299 que par la substitution de $y - k$ à y, ce qui n'altère ni δy ni δx. Il suffit donc de changer aussi y en $y - k$ dans le résultat : la courbe cherchée est une chaînette

$$y - k = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{C}} + e^{-\frac{x - C_1}{C}}\right)$$

et les constantes se détermineront par la condition de faire passer la courbe par les points A et B et de donner à l'arc AB la longueur voulue. Il y aura généralement plusieurs solutions, correspondant à des maxima ou à des minima suivant que la concavité sera tournée ou non vers l'axe de révolution.

Troisième problème. — *Parmi toutes les courbes isopérimètres tracées entre* A *et* B *comme dans le problème précédent, trouver celles qui engendrent les volumes de révolution maximum ou minimum.*

On doit rendre $\int y^2 dx$ maximum ou minimum sous la condition $\int ds = l$. On est donc conduit à poser

$$\delta \int (y^2 dx - k\,ds) = 0.$$

Les points A et B étant donnés, les variations aux limites seront nulles. Pour obtenir l'équation principale, on peut ne faire varier que y (n° 298) ; il vient ainsi

$$\int \left(2y\,\delta y\,dx - k\frac{dy\,d\,\delta y}{ds}\right) = 0,$$

$$\int \left(2y\,dx - k\,d\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

L'équation principale est donc

$$2y - k\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Or, en observant que l'on a (R étant le rayon de courbure)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \pm \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}}\right) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R},$$

cette équation peut s'écrire

$$R = \frac{k}{2y}.$$

Donc le rayon de courbure est en raison inverse de l'ordonnée. La courbe cherchée est la *courbe élastique* et son équation a été intégrée au n° 201 (sauf que les axes sont intervertis).

EXERCICES.

1. *Problème.* — Montrer que, parmi les surfaces de révolution de même aire, celle qui enferme le plus petit volume est la sphère.

2. *Abaissement de l'équation principale.* — Quand y'' est la plus haute dérivée qui entre dans la fonction à intégrer, l'équation principale $Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} = 0$ est généralement du 4ᵉ ordre (Y'' contenant y''). Cet ordre s'abaisse dans les cas suivants :

1° Si F ne contient pas explicitement y, on a $Y = 0$ et l'on obtient immédiatement une intégrale première (du 3ᵉ ordre)

$$Y' - \frac{dY''}{dx} = C.$$

2° Si F ne contient explicitement ni x ni y, on peut éliminer Y' de la relation précédente au moyen de $dF = Y'dy' + Y''dy''$, d'où

$$dF = Cdy' + y''dY'' + Y''dy'' = Cdy' + d(y''Y'')$$

et on obtient une intégrale deuxième (du second ordre)

$$F = C_1 + Cy' + y''Y''.$$

3. *Problème.* — Entre deux points A et B du plan, mener une courbe AMB telle que l'aire comprise entre cette courbe, les rayons de courbure aux points A et B et la développée soit un minimum.

R. Soit R le rayon de courbure ; l'intégrale à rendre minimum est

$$I = \int R\,ds = \int \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\,dx.$$

Observons que F ne contient ni x ni y et que $y''Y'' = -F$; l'intégrale deuxième de l'exercice précédent devient $2F = C_1 + C'y'$. Mais $F = R\frac{ds}{dx}$; il vient donc

$$2R\frac{ds}{dx} = C_1 + Cy', \qquad \text{d'où} \qquad 2R = C_1 \cos\varphi + C \sin\varphi,$$

en appelant φ l'inclinaison de la tangente : c'est l'*équation intrinsèque* (n° 204, remarque) d'une *cycloïde*.

Si l'on donne les extrémités A et B et les directions des rayons de courbure en ces deux points, ces conditions serviront à déterminer les constantes d'intégration. Dans le cas contraire, il faudra recourir à l'équation aux limites.

4. *Dérivées exactes.* — Trouver la condition pour que $F(x, y, y', \dots y^n)$ soit la dérivée exacte d'une fonction de $x, y, \dots y^{n-1}$ quel que soit y (n° 197).

R. Il faut que $\int F(x, y, y', \dots)\, dx$ ne dépende que des limites de l'intégration et non du choix de y ; il faut donc que sa variation soit nulle quand les quantités aux limites sont fixes. On a donc, quel que soit ω,

$$\int \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \cdots \right) \omega\, dx = 0.$$

La condition cherchée est qu'on ait identiquement

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \cdots = 0.$$

5. *Propriétés des lignes géodésiques.* — 1°) Si, à partir d'un point A situé sur une surface, on mène dans toutes les directions des lignes géodésiques d'égale longueur AM, le lieu de leurs extrémités M est une courbe orthogonale aux lignes géodésiques.

2°) Si, en chaque point d'une ligne MN sur une surface, on élève une géodésique normale à MN et de longueur constante, le lieu de leurs extrémités rencontre aussi normalement les lignes géodésiques.

3°) Si l'on prend sur une surface deux points F et F′ et que l'on cherche le lieu des points M de la surface tels que la somme de leurs distances géodésiques à F et F′ soit constante, ce lieu coupe sous le même angle les deux lignes géodésiques MF et MF′.

Ces propriétés, énoncées par Gauss, se tirent facilement du calcul des variations. Démontrons seulement la première, les autres s'établissant d'une manière analogue. Soient (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de A et M. La longueur de la ligne AM est donnée par l'intégrale $I = \int_0^1 ds$ et sa variation est nulle quand on passe d'une ligne géodésique à la suivante. Cette variation δI se calcule par la formule du n° 300. Mais, dans cette formule, l'intégrale est nulle, parce qu'il s'agit d'une ligne géodésique ; les termes à la limite 0 sont nuls aussi, puisque A est fixe ; il reste seulement

$$\delta I = \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0,$$

ce qui prouve le théorème.

§ 2. Calcul des différences finies.

305. Définitions et notations. — Soient u_0, u_1, u_2,... u_n,... une suite de valeurs que reçoit une variable u. Les accroissements successifs de cette variable quand on passe d'une valeur à la suivante s'appellent les *différences premières* de ces valeurs. La formation de ces différences est une opération qui se désigne par le symbole Δ.

On pose

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \ldots \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n, \ldots$$

Les différences des différences premières sont les *différences secondes*

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0, \qquad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1, \ldots$$

Les *différences troisièmes* seront de même

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0, \qquad \Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1, \ldots$$

et ainsi de suite.

Il est souvent avantageux de représenter par ∇ (qui s'énonce pseudodelta) l'opération qui consiste à passer d'une valeur à la suivante dans la suite u_0, u_1, u_2,... On a donc, par définition,

$$\nabla u_0 = u_1, \qquad \nabla u_1 = u_2, \ldots \qquad \nabla u_n = u_{n+1}, \ldots$$

L'opération ∇ peut aussi se répéter successivement un nombre quelconque de fois. On aura

$$\nabla^2 u_n = \nabla u_{n+1} = u_{n+2}, \ldots \qquad \nabla^p u_n = u_{n+p}, \ldots$$

et, en particulier $\nabla^n u_0 = u_n$,

Remarque, — Comme $u_{n+1} = u_u + \Delta u_n$, on a

$$\nabla u_n = u_n + \Delta u_n = (1 + \Delta) u_n,$$
$$\Delta u_n = (\nabla - 1) u_n,$$

on peut donc dire que les opérations Δ et ∇ sont liées par les formules

$$\nabla = 1 + \Delta, \qquad \Delta = \nabla - 1.$$

306. Propriétés des opérations Δ et ∇. — 1°) On a, en vertu des définitions précédentes,

$$\Delta^p \Delta^q u_n = \Delta^q \Delta^p u_n = \Delta^{p+q} u_n$$

et, de même,

$$\nabla^p \nabla^q u_n = \nabla^q \nabla^p u_n = \nabla^{p+q} u_n = u_{n+p+q}$$

On écrira donc, en abrégé,

$$\Delta^p \Delta^q = \Delta^q \Delta^p = \Delta^{p+q}, \qquad \nabla^p \nabla^q = \nabla^p \nabla^q = \nabla^{p+q}$$

2° Si u, v, z,... sont des quantités variables, on a

$$\Delta(u + v - z + \cdots) = \Delta u + \Delta v - \Delta z + \cdots$$

$$\nabla(u + v - z + \ldots) = \nabla u + \nabla v - \nabla z + \cdots$$

et, si a est une constante,

$$\Delta au = a\,\Delta u, \qquad \nabla au = a\,\nabla u.$$

307. Expression de $\Delta^n u_0$ en fonction de u_0, u_1,... u_n. — On a, en vertu des propriétés établies au n° précédent, les symboles Δ et ∇ se comportant comme des quantités dans les calculs,

$$\Delta u_0 = (1 - \nabla) u_0,$$

$$\Delta^2 u_0 = (1 - \nabla).\,(1 - \nabla) u_0 = (1 - \nabla)^2 u_0$$

et, en général,

$$\Delta^n u_0 = (1 - \nabla)^n u_0.$$

Si l'on développe et remplace $\nabla^k u_0$ par u_k, on trouve

$$\Delta^n u_0 = u_0 - n\,u_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} u_2 - \cdots \pm u_n.$$

308. Expression de u_n en fonction de u_0, Δu_0,... $\Delta^n u_0$. — On a

$$u_1 = \nabla u_0 = (1 + \Delta) u_0$$

$$u_2 = \nabla u_1 = (1 + \Delta)^2 u_0$$

et, en général,

$$u_n = \nabla^n u_0 = (1 + \Delta)^n u_0.$$

Si l'on développe, il vient

$$u_n = u_0 + n\,\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0.$$

Remarque. — Les résultats de ce n° et du précédent peuvent être considérés comme compris dans les relations symboliques :

$$\Delta^n = (1 - \nabla)^n \qquad \text{et} \qquad \nabla^n = (1 + \Delta)^n.$$

309. Différences des fonctions simples. — Nous allons considérer simultanément une variable indépendante x et une fonction u de x.

Nous représenterons par u_0, u_1, u_2,... les valeurs successives de u quand on donne à x une série d'accroissements égaux représentés

par h. Les valeurs successives de u et, par conséquent, leurs différences successives dépendent de la valeur initiale de x et de l'accroissement h. Ce sont donc des fonctions de x et de h qu'il s'agit de déterminer.

1°) *Fonction entière.* Supposons u de degré m

$$u = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Kx + L.$$

On a d'abord

$$\Delta u = A[(x+h)^m - x^m] + B[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}] + \ldots + Kh.$$

et, en ordonnant par rapport à x,

$$\Delta u = mAx^{m-1}h + B'x^{m-2} + \cdots + K'.$$

Le premier terme, qui est de l'ordre le plus élevé en x, est de degré $m-1$ et son coefficient s'obtient en multipliant le premier terme de u par le degré de ce terme de u et par h.

En opérant de même sur Δu, il en résulte

$$\Delta^2 u = m(m-1)\,Ax^{m-2}h + B''x^{m-3} + \ldots + K''$$

et ainsi de suite. Le degré de chaque différence successive va en diminuant d'une unité Donc $\Delta^m u$ est de degré 0 et se réduit à son premier terme dont la loi de formation est connue. On a donc

$$\Delta^m u = 1.2\ldots m\,A\,h^m$$

Ainsi *la différence* m^{me} *d'une fonction entière de degré* m *est constante quand la variable* x *varie par degrés égaux et, par conséquent, toutes les différences suivantes seront nulles.*

2°) *Fonction exponentielle.* On a

$$\Delta e^{ax+b} = e^{a(x+\Delta x)+b} - e^{ax+b} = e^{ax+b}\,(e^{a\Delta x} - 1)$$

$$\Delta^2 e^{ax+b} = (e^{a\Delta x} - 1)\,\Delta e^{ax+b} = e^{ax+b}\,(e^{a\Delta x} - 1)^2$$

et, en général

$$\Delta^n\,e^{ax+b} = e^{ax+b}\Delta\,(e^{a\Delta x} - 1)^n$$

De même,

$$\Delta^n\,A^{ax+b} = A^{ax+b}\,(A^{a\Delta x} - 1)^n.$$

3°) *Fonctions circulaires.* On a

$$\Delta \sin(ax+b) = \sin(ax+b+a\Delta x) - \sin(ax+b)$$

$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax+b+\frac{a\Delta x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax+b+\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

et, en général,

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+n\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

De même,

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+n\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

4°) *Logarithme.* On a

$$\Delta \operatorname{Log}(ax+b) = \operatorname{Log}\left(\frac{ax+b+a\Delta x}{ax+b}\right) = \operatorname{Log}\left(1+\frac{a\Delta x}{ax+b}\right).$$

On n'a pas encore réussi à tirer de là l'expression de la différence m^{me} sous une forme simple.

310. Produits équidifférents. — 1°) Soit symboliquement

$$x^{[p]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{p-1}\,h)\,;$$

on aura

$$\begin{aligned}\Delta x^{[p]} &= x(x-h)\ldots(x-\overline{p-2}\,h)\,ph\\ &= p\,x^{[p-1]}\,\Delta x.\end{aligned}$$

De même,

$$\Delta^2 x^{[p]} = p\Delta x\,\Delta x^{[p-1]} = p(p-1)\,x^{[p-2]}\,\Delta x^2$$

et, en général,

$$\Delta^n x^{[p]} = p(p-1)\ldots(p-n+1)\,x^{[p-n]}\,\Delta x^n.$$

L'analogie avec la règle pour différentier une puissance dans le calcul différentiel est évidente.

2°) Soit encore symboliquement

$$x^{-[p]} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{p-1}\,h)}\,;$$

on trouve sans peine

$$\Delta x^{-[p]} = \frac{-ph}{x(x+h)\ldots(x+ph)} = -p\,x^{-[p+1]}\,\Delta x,$$

d'où, en général,

$$\Delta^n x^{-[p]} = (-1)^n\,p(p+1)\ldots(p+n-1)\,x^{-[p+n]}\,\Delta x^n.$$

311. Calcul inverse des différences. Addition d'une fonction périodique arbitraire. — Le calcul inverse des différences est au calcul direct ce que le calcul intégral est au calcul différentiel, il a pour objet de déterminer une fonction quand on connaît sa différence finie ou, plus généralement, une relation entre cette fonction, quelques-unes de ses différences et la variable indépendante. Nous ne nous occuperons ici que du premier cas.

Soit x la variable indépendante, dont l'accroissement $\Delta x = h$ est supposé constant; soient $F(x)$ la fonction inconnue et $f(x)$ la différence donnée : on doit avoir

$$\Delta F(x) = f(x), \qquad \text{ou} \qquad F(x+h) - F(x) = f(x).$$

La fonction $F(x)$ dont la différence est $f(x)$ se représente par $\Sigma f(x)$ et se nomme l'*intégrale aux différences finies* de $f(x)$. D'après ces notations, les caractéristiques Δ et Σ appliquées à la même fonction se détruisent et l'on a

$$\Delta \Sigma f(x) = f(x).$$

Dans le calcul intégral ordinaire, quand on a obtenu une intégrale particulière d'une différentielle donnée, on ajoute à cette première solution une constante arbitraire pour former l'intégrale générale. Dans le calcul intégral aux différences finies, ce n'est pas une constante arbitraire qu'il faut ajouter, mais la fonction la plus générale dont la différence est nulle, c'est-à-dire une fonction quelconque de période $h = \Delta x$. Nous désignerons une pareille fonction par Π.

D'après cela, $f(x)$ étant une fonction particulière dont la différence est $\Delta f(x)$, on a

$$\Sigma \Delta f(x) = f(x) + \Pi.$$

Donc les symboles Σ et Δ se détruisent encore, quand Σ précède Δ, mais il faut ajouter une fonction périodique arbitraire Π.

En vertu de cette remarque, les calculs effectués au n° 309 et 310 donnent réciproquement

$$\Sigma A^x = \frac{A^x}{A^h - 1} + \Pi$$

$$\Sigma \cos(ax+b) = \frac{\sin\left(ax - \frac{ah}{2} + b\right)}{2 \sin \frac{ah}{2}} + \Pi.$$

$$\Sigma x^{[p]} = \frac{x^{[p+1]}}{(p+1)h} + \Pi.$$

Nous indiquerons plus loin (n° 318) la formule générale pour la sommation d'un polynome.

312. Intégrale définie aux différences. — L'intégrale aux différences jouit d'une propriété analogue à celle des fonctions primitives dans

le calcul infinitésimal : Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ une suite de valeurs de différences h, et $F(x)$ une intégrale aux différences de $f(x)$; on a

$$F(x_2)-F(x_1)=f(x_1),\quad F(x_3)-F(x_2)=f(x_2),\ldots\quad F(x_n)-F(x_{n-1})=f(x_{n-1})$$

et, en additionnant toutes ces relations,

$$F(x_n) - F(x_1) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})$$

C'est la propriété que nous voulions établir. Le second membre s'appelle l'*intégrale définie aux différences de* $f(x)$ et se désigne, en abrégé, par $\sum_{x_1}^{x_n-h} f(x)$. L'équation prend ainsi la forme

$$\sum_{x_1}^{x_n-h} f(x) = F(x_n) - F(x_1)$$

et l'analogie avec les formules de quadratures est évidente. Par exemple au moyen de l'intégrale de A^x indiquée à la fin du n° précédent, on obtient, h étant égal à $\frac{b-a}{n}$,

$$A^a + A^{a+h} + A^{a+2h} + \cdots + A^{a+(n-1)h} = \sum_a^{b-h} A^x = \frac{A^b - A^a}{A^h - 1},$$

§ 3. Formule d'Euler.
Relation entre les sommes et les intégrales.

313. Formule préalable. — Ecrivons la formule de Maclaurin :

$$(1)\quad f(x) - f(0) = x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} f^{2p}(0) + R_{2p+1}$$

avec l'expression du reste (t. I, n° 352) :

$$R_{2p+1} = \frac{1}{(2p)!}\int_0^x f^{2p+1}(x-t)\, t^{2p}dt.$$

Remplaçons successivement dans cette formule la fonction f par ses dérivées $f', f'', \ldots f^{2p-1}$ en remplaçant, en même temps, $2p$ par $(2p-1)$, $(2p-2), \ldots$ 1. Multiplions successivement ces équations par B_1x, $\frac{B_2x^2}{2!}, \frac{B_3x^3}{3!} \ldots \frac{B_{2p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)!}$, les B désignant les nombres Bernoulliens, et ajoutons-les membre à membre avec (1). Il viendra un résultat de la forme

$$[f(x)-f(0)] + \frac{B_1x}{1}[f'(x)-f'(0)] + \cdots + \frac{B_{2p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)!}[f^{2p-1}(x)-f^{2p-1}(0)]$$
$$= x f'(0) + A_2x^2 f''(0) + A_3x^3 f'''(0) + \cdots + A_{2p}x^{2p}f^{2p}(0) + R,$$

en posant

$$A_2 = \frac{1}{2!} + \frac{B_1}{1},$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} + \frac{B_1}{2!\,1} + \frac{B_2}{2!},$$

$$A_4 = \frac{1}{4!} + \frac{B_1}{3!\,1} + \frac{B_2}{2!\,2!} + \frac{B_3}{3!},$$

. . . .

et, en désignant par R l'intégrale

$$\int_0^x dt\, f^{2p+1}(x-t)\left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} + \frac{B_1 x t^{2p-1}}{1.\,(2p-1)!} + \frac{B_2 x^2 t^{2p-2}}{2!\,(2p-2)!} + \cdots\right]$$

On remarque d'abord que tous les coefficients A_2, A_3, ... sont nuls, car, avec la notation symbolique, on a, par les relations (7) du n° 249,

$$A_2 = \frac{(1+B)^2 - B^2}{2!} = 0, \qquad A_3 = \frac{(1+B)^3 - B^3}{3!} = 0, \ \ldots.$$

Quant à l'expression entre crochets dans l'intégrale R, elle revient à un polynome de Bernoulli (n° 251), car on peut l'écrire comme il suit :

$$\frac{(t+Bx)^{2p} - (Bx)^{2p}}{(2p)!} = x^{2p}\frac{\left(\frac{t}{x}+B\right)^{2p} - B^{2p}}{(2p)!} = x^{2p}\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right).$$

Il vient donc, φ désignant un polynome de Bernoulli,

$$(2) \qquad R = x^{2p}\int_0^x f^{2p+1}(x-t)\,\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)dt.$$

En se rappelant (n° 243) que tous les B d'indices impairs sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$, nous avons ainsi obtenu la formule suivante :

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} f(x) - f(0) &= x\frac{f'(x)+f'(0)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2!}\left[f''(x) - f''(0)\right] - \cdots \\ &- \frac{B_{2p-2}\,x^{2p-2}}{(2p-2)!}\left[f^{2p-2}(x) - f^{2p-2}(0)\right] + R. \end{aligned}\right.$$

314. Simplification de R. — Utilisons les propriétés des polynomes de Bernoulli énumérées au n° 252. Comme $\frac{t}{x}$ varie de 0 à 1 dans l'expression (2), $\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)$ ne change pas de signe (propriété 5°), et l'on peut poser, par le théorème de la moyenne, θ étant compris entre

0 et 1 (en sorte que θx est une valeur intermédiaire de l'argument $x - t$),

$$R = x^{2p} f^{2p+1}(\theta x) \int_0^x \varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right) dt.$$

Changeons encore t en tx dans l'intégrale, il viendra

$$R = x^{2p+1} f^{2p+1}(\theta x) \int_0^1 \varphi_{2p-1}(t)\, dt.$$

L'intégration s'effectue immédiatement en remplaçant φ_{2p-1} par sa valeur donnée au n° 252,

$$\varphi_{2p-1} = \varphi'_{2p} - \frac{B_{2p}}{(2p)\,!},$$

et en observant que l'intégrale de φ' sera nulle, puisque φ s'annule aux deux limites 0 et 1 (n° 252). Il vient donc simplement

$$(4) \qquad R = -\frac{B_{2p}\, x^{2p+1}}{(2p)\,!} f^{2p+1}(\theta x).$$

315. Formule d'Euler. — Ce n'est qu'une transformation de la formule (**3**). Remplaçons dans le premier membre la fonction $f(x)$ par l'intégrale

$$\int_a^{a+x} f(x)\, dx = \int_0^x f(a+x)\, dx\,;$$

il faudra remplacer dans le second membre la dérivée $f^k(x)$ par $f^{k-1}(a+x)$ et cela pour $k = 1, 2, \ldots.$; il viendra donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^{a+x} f(x)\, dx = x\frac{f(a+x)+f(a)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2\,!}[f'(a+x) - f'(a)] - \cdots \\ - \frac{B_{2p-2}\, x^{2p-2}}{(2p-2)\,!}[f^{2p-3}(a+x) - f^{2p-3}(a)] + R \end{aligned} \right.$$

et la valeur (**4**) de R deviendra $(0 < \theta < 1)$

$$(6) \qquad R = -\frac{B_{2p}\, x^{2p+1}}{(2p)\,!} f^{2p}(a + \theta x).$$

La formule (**5**) est la *formule d'Euler*, mais complétée par l'expression du reste qu'Euler n'a pas donnée.

Comme les nombres B_2, B_4 ... croissent en valeur absolue avec une rapidité extrême, la formule d'Euler deviendrait le plus souvent divergente si l'on y faisait croître p indéfiniment. Mais, en donnant à p une valeur convenable, on pourra généralement faire en sorte que R soit suffisamment petit pour être négligé en pratique, l'expression (**6**) de R permettant d'agir en sûreté.

On se sert de la formule d'Euler pour ramener le calcul des intégrales au calcul des sommes et réciproquement. C'est ce que nous allons montrer.

316. Application de la formule d'Euler au calcul approché des intégrales définies. — Pour appliquer la formule (5) au calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

il suffit évidemment de poser $x = b - a$.

Mais, si l'intervalle d'intégration est un peu grand, il convient, pour obtenir plus d'exactitude, de le décomposer en plusieurs parties. Posons $h = \frac{b-a}{n}$; on aura

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{a+h} + \int_{a+h}^{a+2h} + \cdots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f\,dx.$$

Appliquons à chacune de ces intégrales partielles la formule 5 (où l'on remplacera x par h) et ajoutons les résultats ; il viendra

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) + \frac{f(b)}{2}\right] \\ &- \frac{B_2 h^2}{2\,!}[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4\,!}[f'''(b) - f'''(a)] - \cdots \\ &- \frac{B_{2p-2}\,h^{2p-2}}{(2p-2)\,!}[f^{2p-2}(b) - f^{2p-2}(a)] + R \end{aligned}\right.$$

et le reste R sera donné par la formule

$$R = -n\mu \frac{B_{2p}\,h^{2p}}{(2p)\,!},$$

μ désignant une valeur moyenne de $f^{2p}(x)$ entre a et b.

La formule (7) est celle que nous voulions obtenir. Le terme écrit sur la première ligne au second membre est susceptible d'une interprétation géométrique : il représente la somme des trapèzes inscrits dans la courbe $y = f(x)$ et déterminés par des ordonnées équidistantes. Quant au premier membre, il représente l'aire de la courbe.

317. Formule sommatoire d'Euler. — Réciproquement, la formule (7) peut servir à ramener le calcul d'une somme à celui d'une intégrale définie. Posons, b étant égal à $a + nh$,

$$\sum_a^{b-h} f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h).$$

On tirera de la formule (7)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_a^{b-h} f(x) &= \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \frac{B_2 h}{2\,!}[f'(b)-f'(a)] + \cdots \\ &+ \frac{B_{2p-2}\,h^{2p-2}}{(2p-2)\,!}[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)] + n\mu\frac{B_{2p}\,h^{2p}}{(2p)\,!} \end{aligned}\right.$$

C'est la *formule sommatoire d'Euler* complétée par l'expression du reste. Elle est souvent très utile quand la quadrature indiquée s'effectue simplement.

318. Application à l'intégration aux différences d'un polynome. — Si $f(x)$ est un polynome, la quadrature dans la formule (8) est immédiate. De plus, le développement se termine de lui-même quand les dérivées du polynome deviennent nulles.

Remplaçons b par x, le premier membre aura pour différence $f(x)$. Donc, en négligeant dans le second membre les termes constants, on obtient la formule générale pour la quadrature d'un polynome

$$\Sigma f(x) = \frac{1}{h}\int f(x)\,dx - \frac{f(x)}{2} + \frac{B_2 h}{2\,!}f'(x) + \frac{B_4 h^3}{4\,!}f'''(x) + \cdots$$

Le développement s'arrête de lui-même, mais il faut ajouter la fonction périodique Π. Si $f(x)$ est de degré impair, il sera inutile d'écrire le dernier terme du développement qui se réduit à une constante.

§ 4. Interpolation.

319. Objet de l'interpolation. — L'objet de l'interpolation est de trouver une fonction d'une variable, connaissant les valeurs de cette fonction qui correspondent à un certain nombre de valeurs données de la variable. Ce problème est indéterminé tant qu'on ne fixe pas la forme de la fonction cherchée, car il revient à faire passer une courbe par des points donnés, ce qui peut se faire d'une infinité de manières tant que la courbe n'est pas définie. Le problème de l'interpolation devient déterminé quand la forme de la fonction est donnée et qu'elle renferme autant de paramètres distincts qu'il y a de valeurs données de la fonction. Ainsi une fonction entière de degré n renferme $n+1$ paramètres et on prouve, en algèbre, qu'elle est complètement déterminée, si l'on donne $n+1$ valeurs de la fonction.

320. Formule de Newton. — Newton a donné, dans ses principes, une formule pratique pour exprimer la fonction entière de degré n qui prend $n+1$ valeurs données pour $n+1$ valeurs données de x,

que ces valeurs soient en progression arithmétique ou non. Mais nous indiquerons seulement le cas où les valeurs successives de x ont une différence constante $\Delta x = h$.

En choisissant convenablement l'origine des x, c'est-à-dire en changeant au besoin x en $x - x_0$, on peut faire en sorte que ces valeurs de x soient

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = h, \qquad x_2 = 2h, \quad \cdots \quad x_n = nh.$$

Désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ les valeurs correspondantes données de la fonction entière de degré n à déterminer u. Formons les différences $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots \Delta^n u_0$; on aura

$$u_m = u_0 + m\Delta u_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \cdots$$

Ce développement se termine de lui-même au terme qui renferme $\Delta^m u_0$, car les coefficients suivants sont nuls. Changeons dans ce développement m en $\frac{x}{h}$ et poursuivons maintenant le développement jusqu'au terme qui renferme $\Delta^n u_0$. Je dis que nous pouvons poser

$$u = u_0 + \frac{x}{h}\Delta u_0 + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \cdots + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x}{h} - n + 1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2\cdots n}$$

C'est la *formule de Newton*, dont l'exactitude se vérifie immédiatement, car ce développement se réduit à celui de u_m quand on y pose $x = mh$.

On peut mettre en évidence l'analogie de la formule de Newton avec la série de Maclaurin. Posons, d'après la notation des produits équidifférents (n° 310),

$$x^{[p]} = x(x-h)\cdots[x-(p-1)h]$$

et remplaçons h par Δx, on aura

$$u = u_0 + x\frac{\Delta u_0}{\Delta x} + \frac{x^{[2]}}{1.2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta x^2} + \cdots + \frac{x^{[n]}}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n u_0}{\Delta x^n}.$$

Remarque. — Lorsqu'un polynome u est mis sous la forme précédente, l'intégration aux différences de ce polynome se fait immédiatement. Il vient, en effet,

$$\Sigma u = u_0 x + \frac{x^{[2]}}{1.2}\frac{\Delta u_0}{\Delta x} + \cdots + \frac{x^{[n+1]}}{1.2\ldots(n+1)}\frac{\Delta^n u_0}{\Delta x^n}.$$

321. Formule de Lagrange. — Le polynome u de degré n qui

prend les $n+1$ valeurs $u_0, u_1, \ldots u_n$ pour les valeurs quelconques $x_0, x_1, \ldots x_n$ a été mis par Lagrange sous la forme suivante

$$u = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} u_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} u_1 + \cdots$$

On vérifie immédiatement *a posteriori* que u est de degré n et possède les propriétés indiquées, mais cette formule est d'une application très peu pratique.

322. Formules d'approximation pour les quadratures. — Les formules d'interpolation peuvent servir au calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

lorsque cette quadrature ne peut se faire exactement. On remplace, à cet effet, la courbe $y = f(x)$ par une autre que l'on sait intégrer.

On peut remplacer $f(x)$ par un polynome de degré n à l'aide de la formule de Lagrange. Cela revient à remplacer la courbe $y = f(x)$ par une parabole du n^{me} degré ayant $n+1$ points communs avec elle. On obtient ainsi la *méthode d'intégration de Cotes*, qui est d'ailleurs peu recommandable.

Au lieu de faire l'interpolation dans l'intervalle (a, b) tout entier, on peut partager cet intervalle en parties consécutives et interpoler dans chaque partie. On peut remplacer $f(x)$ par une suite de polynomes du premier degré, c'est-à-dire la courbe par une suite de droites, et l'on obtient la *formule des trapèzes.*

On peut aussi remplacer $f(x)$ par une suite de polynomes du deuxième ou du troisième degré, c'est-à-dire la courbe par une suite d'arcs de paraboles, et, en supposant les intervalles égaux, on obtient la *formule de Simpson* (t. I, n° 314).

323. Expression empirique de certaines lois. — Quand la loi exacte des variations de certaines quantités n'est pas connue, comme cela a lieu pour la plupart des phénomènes naturels, on peut recourir aux formules d'interpolation. On détermine les valeurs de la fonction pour une série de valeurs de la variable et les formules d'interpolation fournissent une règle empirique pour calculer les valeurs de la fonction pour d'autres valeurs de la variable. Les formules ainsi établies ne méritent généralement que peu de confiance.

CHAPITRE VIII.

Applications géométriques (*Suite*).
Points singuliers. Contact. Enveloppes.

---

§ 1. Points singuliers des courbes planes.

324. Points ordinaires et points singuliers. — Considérons l'équation d'une courbe plane, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques,

$$(1) \qquad f(x,y) = 0,$$

et supposons que f et ses dérivées f'_x et f'_y soient des fonctions continues et uniformes de x, y dans le voisinage d'un point $M(a, b)$ de la courbe.

Si $f'_y(a, b)$ n'est pas nul, l'équation (1) n'a, dans le voisinage du point M, qu'une seule solution

$$y = \varphi(x),$$

qui représente une seule branche continue de courbe passant par le point M ; et cette branche possède une tangente déterminée, dont la direction varie d'une manière continue avec la position du point de contact. C'est la conséquence du théorème général sur l'existence des fonctions implicites (t. 1, nº 142).

Un point M qui possède ces caractères s'appelle un *point ordinaire* de la courbe.

Si f'_x était nul au point M mais f'_y différent de 0, on pourrait résoudre l'équation (1) par rapport à x et la conclusion serait analogue.

Donc, si nous appelons *points singuliers* les seuls points qui ne possèdent pas les caractères énumérés plus haut, nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

Quand $f(x, y)$ et ses dérivées partielles sont continues, la courbe $f(x. y) = 0$ ne peut avoir d'autres points singuliers que ceux dont les coordonnées a et b satisfont simultanément aux trois équations.

$$f(a, b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Donc, pour trouver les points singuliers d'une courbe, il faut chercher s'il existe des systèmes de solutions des trois équations précédentes ; ou bien s'il existe des valeurs de x, y rendant discontinues f ou ses dérivées partielles.

Nous laisserons d'abord de côté les singularités provenant des discontinuités pour porter notre attention sur ceux de la première catégorie, qui sont de loin les plus importants.

L'étude de ces points peut être faite d'une manière simple et complète quand on se place au point de vue des fonctions d'une variable complexe et il convient de la reprendre dans la théorie des fonctions analytiques. Pour le moment, nous nous plaçons au point de vue des variables réelles et nous allons nous borner aux cas les plus simples et aux procédés de recherche les plus élémentaires.

325. **Points singuliers de divers ordres.** — Soit M (a, b) un point singulier de la courbe $f(x, y) = 0$. Supposons $f(x, y)$ continue ainsi que toutes ses dérivées partielles aux environs de ce point. On peut développer $f(x, y)$ par la formule de Taylor suivant les puissances de $x - a$ et de $y - b$; seulement, comme f, f'_x et f'_y s'annulent au point M par hypothèse les termes des ordres 0 et 1 disparaissent et le développement débute par les termes du second ordre. On a donc

$$f(x, y) = \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{n-1} + R_n$$

en désignant par φ_2, φ_3,... des polynomes homogènes en $(x - a)$ et $(y - b)$ de degrés 2, 3,... et par R_n le terme complémentaire.

Si l'ensemble des termes du second ordre

$$\varphi_2 = \frac{(x-a)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + (x-a)(x-b)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + \frac{(y-b)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}$$

ne disparaît pas identiquement comme les précédents, c'est-à-dire si l'une au moins des dérivées secondes de f ne s'annule pas au point M, on dira que M est un *point singulier du second ordre*.

Si au contraire φ_1, φ_2, φ_3,... φ_{n-1} sont identiquement nuls mais que φ_n ne le soit pas, on dira que le point M(a, b) de la courbe est un *point singulier de l'ordre n*.

326. **Etude des points singuliers du second ordre.** — D'après ce qui précède, un point singulier du second ordre M(a, b) de la courbe $f(x, y) = 0$, est caractérisé par ce fait que le développement de $f(x, y)$ suivant les puissances de $x - a$, $y - b$ est de la forme

$$f(x,y) = \varphi_2 + \varphi_3 +$$

où φ_2 n'est pas identiquement nul.

La forme de la courbe dans le voisinage du point M est liée aux propriétés de l'équation homogène du second degré

$$\varphi_2 = 0,$$

qui représente un faisceau de deux droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, passant par le point M.

On a, en effet, le théorème suivant dont nous allons expliquer les termes et donner la démonstration :

Posons, en abrégé,

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}.$$

THÉORÈME. — 1° *Si l'on a* $\Delta < 0$, *ou, ce qui revient au même, si les deux droites du faisceau sont imaginaires, le point* M *est un* POINT ISOLÉ.

2° *Si l'on a* $\Delta > 0$, *ou si les deux droites du faisceau sont réelles et distinctes, le point* M *est un* POINT DOUBLE A TANGENTES DISTINCTES, *c'est-à-dire que la courbe possède deux branches passant par* M *et respectivement tangentes aux deux droites du faisceau* (fig. 2).

3° *Si l'on a* $\Delta = 0$, *c'est-à-dire si* φ_2 *est carré parfait et que les deux droites du faisceau se confondent, il y a doute sur la forme de la courbe, mais, sauf exception, le point* M *sera un* POINT DE REBROUSSEMENT *de première espèce* (fig. 3).

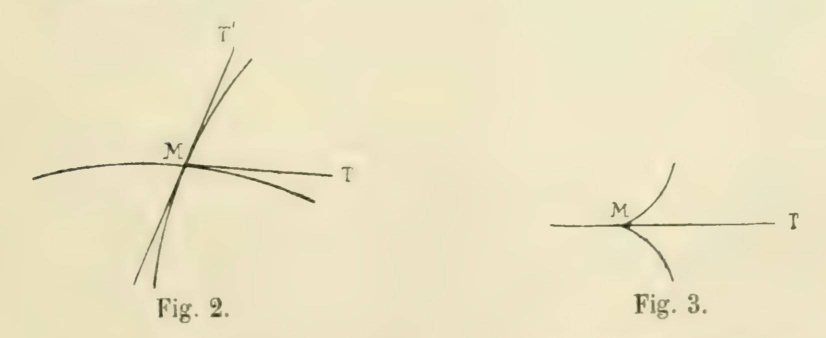


Fig. 2. Fig. 3.

Pour simplifier l'écriture, supposons qu'on ait préalablement transporté l'origine au point M et que l'équation de la courbe soit alors

$$f(x, y) = 0.$$

Nous sommes ramenés à étudier cette courbe dans le voisinage de

l'origine. Développons $f(x, y)$ par la formule de Maclaurin suivant les puissances de x, y, les termes du second ordre ne disparaîtront pas et l'on aura

$$f(x, y) = \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{n-1} + R_n,$$

les φ désignant maintenant des polynomes homogènes en x, y de degrés marqués par leur indice, et R_n le terme complémentaire.

Pour trouver l'expression de R_n, posons $\varphi(t) = f(xt, yt)$ et faisons le développement

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + R'_n.$$

On sait que celui de $f(x, y)$ s'en tire pour $t = 1$. Il vient donc, par la formule du nº 352 du tome premier,

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \varphi^n(ut)(1-u)^{n-1}\, du.$$

Or $\varphi^n(ut)$ prend, par les règles de dérivation, la forme d'un polynome homogène de degré n en x, y ayant les dérivées d'ordre n de f comme coefficients. Donc *on peut aussi mettre* R_n *sous la forme d'un polynome homogène de degré* n *en* x, y, *dont les coefficients sont des fonctions continues de* x, y *ainsi que leurs dérivées.*

Ajoutons encore une remarque préalable. Quel que soit le point (x, y), un au moins des deux rapports $y : x$ ou $x : y$ ne surpasse pas l'unité en valeur absolue. Donc on peut toujours trouver les points de la courbe en posant $y = ux$, puis $x = vy$ et en cherchant les valeurs *finies* de u et de v qui satisfont à l'équation transformée de la courbe.

Arrivons maintenant à la démonstration du théorème, le point M étant pris comme origine.

Premier cas. $\Delta < 0$. — Les droites du faisceau sont imaginaires. L'origine est alors à distance finie de tout autre point de la courbe et l'on dit que l'origine est un *point isolé*. Nous allons le prouver.

Mettons l'équation de la courbe sous la forme

$$\varphi_2(x, y) + R_3 = 0.$$

Posons d'abord dans cette équation $y = ux$ et divisons par x^2 ; il vient, eu égard à la forme de R_3,

$$\varphi_2(1, u) + \mu x = 0,$$

μ gardant une valeur finie quand x tend vers 0 et que u reste fini. Or

$\varphi_2(1, u)$, ayant ses racines imaginaires, reste supérieur à un nombre fixe en valeur absolue. L'équation précédente devient donc impossible dès que x tend vers 0. De même, si l'on posait $x = vy$, on serait conduit à une relation impossible quand y tend vers 0 et que v reste fini. Donc la courbe n'a aucun point dans le voisinage de l'origine.

Deuxième cas, $\Delta > 0$. — Si les droites sont réelles et distinctes, la courbe possède deux branches qui se coupent à l'origine et qui sont respectivement tangentes à chacune des droites du faisceau.

Prenons les deux droites du faisceau comme axes coordonnés ; $\varphi_2(x, y)$ se réduira au seul terme xy, à part un coefficient qu'on rend égal à l'unité en divisant toute l'équation par ce facteur. On ramène ainsi l'équation de la courbe à la forme

$$f(x, y) = xy + R_3 = 0.$$

Faisons d'abord la substitution $y = ux$ où u doit rester fini, R_3 prendra la forme $x^3\psi(u, x)$, où ψ est continue ainsi que ses dérivées ; et, en divisant toute l'équation par x^2, il viendra

$$u + x\,\psi\,(u, x) = 0.$$

Cette équation prouve que u tend nécessairement vers 0 avec x. C'est l'équation d'une courbe que nous appellerons la courbe (u, x) pour la distinguer de la courbe (x, y). Pour cette courbe (u, x), l'origine est un point ordinaire, car le terme du premier degré en u ne disparaît pas. Donc il existe une solution u et une seule en fonction de x et elle est infiniment petite avec x.

Si $\psi(0, 0)$ n'est pas nul, la valeur principale de u sera

$$u = -x\,\psi\,(0, 0)$$

et celle de y

$$y = -x^2\,\psi\,(0, 0).$$

C'est l'équation approchée d'une branche de courbe tangente à l'axe des x à l'origine et ne présentant pas d'inflexion en ce point.

Si $\psi\,(0, 0)$ est nul, la valeur principale de u sera la même que celle de $-x\,\psi\,(0, x)$ et celle de y la même que celle de $-x^2\,\psi\,(0, x)$. Il y a donc inflexion ou non suivant que le développement de $\psi\,(0, x)$ suivant les puissances de x débute par un terme d'ordre impair ou d'ordre pair.

On montre de même, en faisant la substitution $x = vy$, que la

courbe possède une branche tangente à l'axe des y et qui ordinairement n'a pas d'inflexion à l'origine.

D'ailleurs la courbe ne peut avoir dans le voisinage de l'origine que les seuls points que nous venons de déterminer.

La courbe la plus simple présentant un point double à tangentes distinctes est le *folium* de Descartes

$$xy + x^3 + y^3 = 0.$$

Troisième cas. $\Delta = 0$. — Les deux droites du faisceau se confondent ; en prenant cette droite pour axe des x, on peut réduire φ_2 au seul terme y^2, ce qui ramène l'équation de la courbe à la forme

$$f(x, y) = y^2 + \varphi_3 (x, y) + \varphi_4 (x, y) + \cdots = 0.$$

On reconnaît immédiatement qu'aucun point infiniment voisin de l'origine ne peut être fourni par la substitution $x = vy$ où v reste fini, car, par cette substitution, puis par la suppression du facteur y^2 et dans l'hypothèse de y infiniment petit, l'équation se réduit à $1 = 0$, ce qui est impossible.

Il suffit donc d'étudier la substitution $y = ux$. Après division par x^2, elle fournit la relation

$$u^2 + x\varphi_3(1, u) + x^2\varphi_4 (1, u) + \cdots = 0,$$

qui montre d'abord que u doit être infiniment petit avec x.

En général, $f(x, y)$ contient un terme en x^3 et $\varphi_3(1, 0)$ n'est pas nul. Dans ce cas, le premier membre de la relation précédente contient un terme du premier degré, qui est le terme en x, et l'origine est un point ordinaire pour la courbe (u, x). Il existe une valeur x fonction de u et une seule qui vérifie l'équation dans le voisinage de l'origine, et elle a pour valeur principale

$$x = -\frac{u^2}{\varphi_3(1, 0)}.$$

On en tire deux valeurs pour u et deux valeurs pour y

$$u = \pm\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)} \qquad y = \pm x\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)}.$$

Ces deux valeurs de y sont de signes contraires et ne sont réelles que si x a le signe de $-\varphi_3(1, 0)$. Donc la courbe n'existe que d'un seul côté de l'axe des y et elle possède deux branches qui touchent

l'axe des x à l'origine mais s'arrêtent en ce point. Ces deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune. On dit alors que l'origine est *un point de rebroussement de première espèce.*

Toutefois cette conclusion reste soumise à l'hypothèse que $f(x, y)$ étant développé, contienne un terme en x^3. Dans le cas contraire, il y a *doute* et il faut un nouvel examen.

La courbe la plus simple présentant un point de rebroussement de première espèce à l'origine aura donc une équation de la forme

$$y^2 + x^3 = 0$$

327. Discussion du cas douteux. — Quand les termes du secoud degré forment un carré y^2 mais qu'il n'y a pas de termes en x^3, les choses se compliquent. Supposons qu'on ait, en développant l'équation,

$$\begin{aligned} f(x, y) = y^2 &+ (b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) \\ &+ (a_4x^4 + b_4x^3y + \cdots) \\ &+ (a_5x^5 + b_5x^4y + \cdots) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Il vient, en posant $y = ux$, divisant par x^2 et ordonnant,

$$(u^2 + b_3\,ux + a_4\,x^2) + (a_5x^3 + b_4\,x^2u + c_3xu^2) + \cdots = 0.$$

Donc l'origine est *un point singulier du second ordre* pour la courbe (u, x). Nous sommes amenés à recommencer sur cette courbe la discussion déjà faite pour la courbe (x, y). Concluons donc :

1°) Si le trinome $(u^2 + b_3u + a_4)$ a ses racines imaginaires, l'origine est un *point isolé* pour la courbe (u, x), donc aussi pour la courbe (x, y).

2°) Si ce trinome a ses racines α et β réelles et distinctes, la courbe (u, x) possède deux branches tangentes à l'origine aux droites

$$u = \alpha x, \qquad u = \beta x\,;$$

donc la courbe (x, y) possède deux branches correspondantes, ayant pour équations approchées

$$y = \alpha x^2, \qquad y = \beta x^2,$$

et, par conséquent, toutes deux tangentes à l'axe des x. Elles sont du même côté ou de part et d'autre de cet axe selon que α et β sont de même signe ou non. Si l'une des racines α, β est nulle, les valeurs correspondantes de u et de y seront d'ordre plus élevé en x et la

branche correspondante de la courbe (x, y) pourra exceptionnellement présenter un point d'inflexion. Dans ces divers cas, on dit que l'origine est un *point double à tangentes confondues* (fig. 4.)

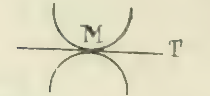


Fig. 4.

Par exemple, ce sera le cas pour la courbe

$$y^2 (1 + x) = x^4$$

3°) Si le trinome $(u^2 + b_3 ux + a_4 x^2)$ est égal à un carré $(u - \alpha x)^2$, et qu'on ne retombe pas une seconde fois sur le cas douteux, la courbe (u, x) est tangente à la droite $(u - \alpha x) = 0$ et possède à l'origine un point de rebroussement de première espèce. Ses deux branches ont, d'après le n° précédent, des équations approchées de la forme

$$(u - \alpha x) = \pm x \sqrt{m x}$$

et il en résulte pour la courbe (x, y) deux branches correspondantes

$$y = x^2 (\alpha \pm \sqrt{m x})$$

Ces deux branches sont tangentes à l'axe des x à l'origine mais s'arrêtent en ce point. Elles sont situées du même côté de leur tangente, pourvu que α ne soit pas nul, et l'on dit alors l'origine est un *point de rebroussement de deuxième espèce* (fig. 5).

Fig. 5.

Si α était nul, le rebroussement serait de première espèce.

La courbe la plus simple ayant un point de rebroussement de deuxième espèce à l'origine aura pour équation

$$(y - x^2)^2 = x^5.$$

Exceptionnellement, il peut arriver que l'on retombe encore une fois sur le cas douteux, alors il faut recommencer une troisième fois les mêmes raisonnements et ainsi de suite.

Si l'on arrive à une solution, on voit facilement que l'origine ne peut être pour la courbe qu'un point isolé, un point double à tangentes distinctes ou non, ou bien un point de rebroussement de première ou de deuxième espèce. Mais il peut arriver que le cas douteux se reproduise indéfiniment et alors la méthode n'aboutit pas.

328. **Points multiples d'ordre supérieur.** — Supposons maintenant que l'origine soit un point singulier d'ordre n de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Le développement de $f(x, y)$ par la formule Maclaurin débutera par les termes de l'ordre n. Cela revient à dire que f s'annule à l'origine ainsi que ses dérivées d'ordre $< n$, mais qu'une au moins des dérivées d'ordre n ne s'annule pas. L'équation de la courbe se met sous la forme

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n+1}(x, y) + \cdots = 0.$$

Nous allons montrer que les propriétés de la courbe dans le voisinage de l'origine sont liées à celles de l'équation homogène d'ordre n

$$\varphi_n(x, y) = 0,$$

qui représente un faisceau de n droites réelles ou imaginaires passant par l'origine. Les développements donnés précédemment pour le cas où $n = 2$ nous permettent d'abréger pour le cas général.

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe infiniment voisin de l'origine O. Désignons par r la distance OM et par λ, μ les coefficients directeurs de OM. Substituons dans l'équation de la courbe les valeurs $x = \lambda r$, $y = \mu r$ et divisons par r^n ; il viendra

$$\varphi_n(\lambda, \mu) + r\varphi_{n+1}(\lambda, \mu) + \cdots = 0.$$

Donc, si r est infiniment petit, les coefficients directeurs λ, μ diffèrent infiniment peu d'une solution de $\varphi_n(\lambda, \mu) = 0$. On en conclut que toute branche de courbe passant par l'origine est nécessairement tangente à l'une des droites du faisceau $\varphi_n(x, y) = 0$. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute branche (réelle) de la courbe est nécessairement tangente à une droite réelle du faisceau* $\varphi_n(x, y) = 0$. *En particulier, si tout le faisceau est imaginaire, l'origine est un point isolé.*

En vertu de ce théorème, on est ramené à examiner séparément chaque droite du faisceau pour reconnaître s'il lui correspond une branche tangente et de quelle nature.

Considérons, en particulier, une droite d'ordre k de multiplicité du faisceau ($k \leqslant n$). En la prenant comme axe des x, on fera apparaître dans $\varphi_n(x, y)$ le facteur y^k et l'équation de la courbe deviendra

$$y^k \psi_{n-k}(x, y) + \psi_{n+1}(x, y) + \cdots = 0,$$

les ψ désignant des polynomes homogènes du degré indiqué par l'indice et dont le premier ne contient plus y en facteur.

Posons $y = ux$ dans l'équation de cette courbe (x, y), et divisons par x^n ; nous trouvons l'équation d'une courbe (u, x)

$$u^k \psi_{n-k}(1, u) + x\psi_{n+1}(1, u) + \cdots = 0$$

L'étude d'une branche de la courbe (x, y) tangente à la droite considérée, revient à celle de la courbe (u, x) dans le voisinage de l'origine.

En effet, u doit être infiniment petit pour que y soit infiniment petit par rapport à x et, si l'on connaît une valeur principale de u, on connaît une valeur principale de $y = ux$.

On arrive ainsi aux conclusions suivantes :

Premier cas. *La courbe (u, x) a un point simple à l'origine.* — C'est le cas ordinaire et il peut avoir lieu dans deux hypothèses : *a*) si $k = 1$; *b*) si k est > 1 mais que $\psi_{n+1}(1, 0)$ ne soit pas nul.

a) Si $k = 1$, l'équation de la courbe (u, x) renferme un terme du premier degré en u, car $\psi_{n-k}(1, 0)$ n'est pas nul ; donc u a une valeur et une seule en fonction de x, sa valeur principale se tire de l'équation

$$u\psi_{n-1}(1, 0) + x\psi_{n+1}(1, 0) = 0$$

et il en résulte une seule valeur de y, toujours réelle.

Donc, *à toute droite réelle simple du faisceau, correspond une branche qui la touche à l'origine.*

b) Si k est > 1 mais que $\psi_{n+1}(1, 0)$ ne soit pas nul, l'équation de la courbe (u, x) contient un terme du premier degré en x, et x a une valeur et une seule en fonction de u. Sa valeur principale se tire de l'équation

$$u^k \psi_{n-k}(1, 0) + x\,\psi_{n+1}(1, 0) = 0 ;$$

elle est de la forme $x = m u^k$, en désignant par m une constante non nulle. On en tire, inversement, les valeurs principales de u puis de y, ce qui donne

$$y = ux = x\sqrt[k]{\frac{x}{m}}$$

Si k est impair, le radical a une seule valeur réelle qui change de signe avec x. Donc *une droite multiple d'ordre impair est une tangente d'inflexion.*

Si k est pair, le radical n'est réel que si x a le signe de m, auquel cas il a deux valeurs de signes contraires. Donc *une droite multiple d'ordre pair est une tangente de rebroussement (de première espèce).*

Par exemple, l'origine est un point singulier du 5e ordre pour la courbe

$$x^2y^3 = x^6 + y^6 ;$$

l'axe des x (droite triple) est une tangente d'inflexion et l'axe des y (droite double) uue tangente de rebroussement.

Deuxième cas. *La courbe (u, x) a un point singulier à l'origine.* — Comme il y a un terme en u^k, ce point est d'ordre $\leqslant k \leqslant n$. On recommencera sur ce point singulier l'analyse faite pour la courbe (x, y), et ainsi de suite.

329. Autres points singuliers. — Il peut encore exister d'autres singularités tenant à certaines discontinuités des fonctions qui entrent dans l'équation de la courbe, mais on n'a pas de règles pour les étudier. Voici quelques exemples :

1°) *Point d'arrêt.* Supposons qu'une fonction $f(x)$, continue et à détermination unique, cesse brusquement d'exister ou devienne imaginaire sans passer par l'infini quand x passe par la valeur a ; la courbe

$$y = f(x)$$

aura un point d'arrêt pour $x = a$. Par exemple, les courbes

$$y = x \operatorname{Log} x, \qquad y = \sin^2 \sqrt{x}$$

ont une branche infinie dans le sens des x positifs, mais qui s'arrête brusquement à l'origine. L'origine est un point d'arrêt.

2°) *Point anguleux.* Ce sont ceux où aboutissent deux arcs de courbe sous une inclinaison différente. Par exemple, la courbe

$$y = x\,(\cos \sqrt{x} \pm \sqrt{1-x})$$

possède un *point saillant* ou *anguleux* à l'origine.

3° *Point de dédoublement.* Ces points, signalés par Plateau, sont ceux où une branche unique se sépare en deux autres. Il est facile de former une courbe présentant cette singularité. Prenons une courbe comme le folium de Descartes, $x^3 + y^3 = 3axy$, qui a un point double à l'origine mais trois branches (sur quatre) du côté des x positifs, et remplaçons dans son équation y par $y + e^{-\frac{1}{x}}$. La branche située du côté des x négatifs sera rejetée à l'infini et l'on aura un point de dédoublement à l'origine.

§ 2. Asymptotes des courbes planes.

330. Définition. — On appelle *asymptote* d'une branche de courbe allant à l'infini, une droite AB telle que la distance à cette droite d'un point M qui s'éloigne indéfiniment sur la courbe ait pour limite zéro.

Pour que cette condition soit réalisée, il est nécessaire et suffisant que la distance du point M à la droite AB ait pour limite zéro, cette distance étant comptée parallèlement à une droite fixe quelconque, non parallèle à AB. En effet, la distance vraie et la distance oblique sont alors dans un rapport constant différent de zéro.

331. Asymptotes parallèles à l'axe des y. — Elles s'obtiennent directement en faisant usage du théorème suivant :

Pour qu'une droite $x = a$ soit une asymptote de la courbe $y = f(x)$ en coordonnées rectangulaires ou obliques, il faut et il suffit que la valeur absolue de $f(x)$ croisse à l'infini quand x tend vers a dans un sens déterminé.

En effet, dans ces conditions, le point M (x, y) de la courbe s'éloigne à l'infini et sa distance à la droite $x = a$ comptée parallèlement à l'axe des x, distance égale (au signe près) à $x - a$, tend vers zéro.

Si la courbe a pour équation $f(x, y) = 0$, on trouvera les asymptotes parallèles à l'axe des y en cherchant pour quelles valeurs finies de x une ou plusieurs déterminations de y tendent vers l'infini.

Par exemple, on voit ainsi que l'axe des y est une asymptote de la courbe

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

car y tend vers l'infini quand x est positif et tend vers 0. La branche de la courbe est à droite de l'axe des y.

On suivrait une méthode analogue pour trouver les asymptotes parallèles à l'axe des x. On reconnaît ainsi que la courbe précédente a une seconde asymptote $y = 1$, car x tend vers l'infini quand y tend vers 1.

332. Asymptotes non parallèles à l'axe des y. — Pour les trouver, on se sert du théorème suivant :

Si une branche infinie de courbe possède une asymptote $y = cx + d$, les coefficients c et d sont donnés par les relations

$$(1) \qquad c = \lim \frac{y}{x}, \qquad d = \lim (y - cx)$$

où x tend vers l'infini, le point M (x, y) *restant sur la branche de courbe.*

En effet, la distance du point M (x, y) à la droite $y - cx - d = 0$ est proportionnelle à l'expression $y - cx - d$. Pour que cette droite soit une asymptote, il faut donc que $y - cx - d$ ait pour limite 0 quand M s'éloigne à l'infini sur la branche correspondante ; et alors x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le sens dans lequel cette branche est infinie. Cela revient à dire que l'équation de la branche de courbe peut se mettre sous la forme

$$y - cx - d = u,$$

où u est une fonction de x qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini dans le sens indiqué. On déduit de cette relation

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = c + \frac{d+u}{x}, \qquad y - cx = d + u\ ;$$

et en faisant tendre x vers l'infini dans le sens de la branche infinie, on obtient les deux formules du théorème.

Réciproquement, si les limites (1) *existent quand le point* M (x, y) *s'éloigne à l'infini sur une branche de la courbe, la droite* $y = cx + d$ *sera une asymptote de cette branche.*

En effet, si les limites (1) existent, $y - cx - d$ tend vers 0 quand M (x, y) s'éloigne à l'infini sur la branche, et $y - cx - d = 0$ est une asymptote.

Il est bon d'observer que, pour une branche située à droite de l'axe des y, x tend vers $+\infty$ et que x tend vers $-\infty$ pour une branche située à gauche. D'autre part, selon que la branche sera située au-dessus ou au-dessous de son asymptote, u sera positif ou négatif.

333. Asymptotes des courbes algébriques. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de degré n. En rangeant les termes par degrés décroissants, on la met sous la forme

$$(1) \qquad \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots = 0,$$

les polynomes φ étant de degrés $n, n-1, \ldots$

Pour trouver les asymptotes non parallèles à l'axe des y, posons $y = tx$; l'équation divisée par x^n donne

$$(2) \qquad \varphi_n(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-1}(1, t) + \cdots = 0.$$

L'inconnue t a généralement, en même temps que y, plusieurs déterminations correspondant aux diverses branches de la courbe. Si x peut croître indéfiniment sur une branche, l'équation précédente donnera $\lim \varphi_n(1, t) = 0$. Donc t ou $y : x$ ne peut avoir pour limite qu'une racine de l'équation

$$(3) \qquad \varphi_n(1, t) = 0.$$

Pour que la courbe ait des asymptotes non parallèles à l'axe des y, il faut donc que cette équation ait des racines réelles. Les directions fournies par les racines $c_1, c_2, \ldots$ de cette équation portent le nom de directions asymptotiques. L'équation (3) est l'*équation des directions asymptotiques.*

Considérons, en particulier, une racine c de cette équation. Posons $y = cx + v$ dans l'équation (1); puis, après avoir effectué les réductions, divisons par la plus haute puissance de x dans l'équation. Le résultat sera de la forme

$$(4) \qquad \psi(v, c) + \frac{1}{x}\psi_1(v, c) + \cdots = 0.$$

Faisons tendre x vers l'infini; v ou $y - cx$ ne peut tendre que vers une racine de l'équation

$$(5) \qquad \psi(v, c) = 0.$$

Pour qu'il existe une asymptote correspondant à la direction c, il faut donc que $\psi(v, c)$ contienne v et que $\psi(v, c) = 0$ ait au moins une racine réelle. Soit d l'une de ces racines réelles, la droite

$$y = cx + d$$

sera une asymptote, *pourvu qu'il lui corresponde une branche infinie (réelle) de la courbe.* Si c'est le cas, l'équation de cette branche sera de la forme

$$(6) \qquad y = cx + d + u,$$

où u tend vers zéro quand x est infini d'un signe déterminé. Ce signe correspond au sens dans lequel la droite est asymptote, tandis que le signe de u fait connaître si la branche de courbe est au-dessus ou au-dessous de son asymptote.

Pour nous assurer de l'existence de cette branche, portons la valeur (6) de y dans l'équation de la courbe, ce qui revient à remplacer v par $d + u$ dans l'équation (4). Il faudra que l'équation

$$\psi(d + u, c) + \frac{1}{x}\psi_1(d + u, c) + \cdots = 0$$

fournisse au moins une valeur infiniment petite de u pour x infini (d'un signe déterminé).

Remplaçons x par $1 : x'$, l'équation

$$(7) \qquad \psi(d + u, c) + x'\psi_1(d + u, c) + \cdots$$

devra fournir une valeur infiniment petite de u pour une valeur infiniment petite et de signe déterminé de x'. On est donc ramené à reconnaître si la courbe (7) possède une ou plusieurs branches passant par l'origine et quelle est leur disposition. C'est la question étudiée dans le paragraphe précédent.

Quand on connaîtra la disposition de la courbe (7) autour de l'origine, on en déduira, sans difficulté, la situation des branches de la courbe (1) qui ont $y = cx + d$ pour asymptote. En effet, à toute branche de (7) correspond une branche infinie de (1) et les signes correspondants de u et de x sont les mêmes que ceux de u et x'.

Remarque I. — Si d est une racine simple de l'équation (5), la droite $y = cx + d$ est une asymptote de la courbe, et cela dans les deux sens.

En effet, dans ce cas, $u = 0$ est racine simple de $\psi(d + u, c)$; on en conclut que l'origine est un point ordinaire pour la courbe (7) dont l'équation renferme un terme du 1er degré en u. Donc la fonction u existe et est infiniment petite avec x' (positif ou négatif).

Remarque II. — La recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y peut se faire par une discussion identique à la précédente : il suffit d'intervertir x et y dans les raisonnements.

334. Exemples. — I. *Folium de Descartes* : $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

L'équation des directions asymptotiques est $1 + t^3 = 0$ et ne fournit qu'une seule direction réelle $c = -1$. Substituant $y = -x + v$ dans la courbe, il vient

$$v + a - \frac{v(v+a)}{x} + \frac{v^3}{3x^2} = 0.$$

Donc d est fourni par $d + a = 0$ qui n'a qu'une racine *simple* $-a$. Il y a une asymptote $y = -x - a$ et elle est asymptote dans les deux sens.

Pour reconnaître la position des deux branches correspondantes, remplaçons v par $-a + u$ et x par $1 : x'$ dans la relation entre v et x. Il vient

$$u - x'u(u - a) + \frac{1}{3}x'^2(u - a)^3 = 0.$$

La valeur principale de u est $\frac{1}{3}a^3x'^2$ qui a le signe de a. Si a est positif, les deux branches infinies sont au-dessus de l'asymptote.

II. Soit la courbe $x^4 - y^4 + xy = 0$.

L'équation des directions asymptotiques, $1 - t^4 = 0$, fournit deux directions réelles $c = \pm 1$. Substituant $y = cx + v$ dans la courbe, il vient ($c = \pm 1$)

$$4cv - \frac{c - 6v^2}{x} + \cdots = 0.$$

Donc d est fourni par $4cd = 0$, qui n'a qu'une racine *simple* 0. Il y a donc deux asymptotes $y = cx$ ($c = \pm 1$) et elles sont asymptotes dans les deux sens.

Pour reconnaître la position des branches infinies, remplaçons v par u et x par $1 : x'$ dans l'équation entre v et x ; il vient

$$4cu - x'(c - bv^2) + \cdots = 0.$$

La valeur principale de u est $\frac{x'}{4}$ et change de signe avec x' ; les deux branches relatives à une même asymptote sont donc de part et d'autre de cette droite, au-dessus du côté des x positifs et au-dessous du côté des x négatifs.

III. Considérons la courbe $y^2x^2 - ax + a^2 = 0$.

L'équation des directions asymptotiques, $t^2 = 0$, donne une seule direction réelle $c = 0$. Substituant $y = cx + v = v$, il vient

$$v^2 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad d^2 = 0.$$

Donc, $d = 0$ étant racine *multiple*, il *peut* y avoir une asymptote $y = 0$. Assurons-nous de l'existence des branches correspondantes. Substituons $v = d + u = u$ et $x = 1 : x'$; il vient

$$u^2 - ax' + a^2x'^2 = 0.$$

L'origine est un point simple de cette courbe. On voit que u existe et a pour valeur principale $\pm\sqrt{ax'}$ pourvu que x' ait le signe de a. Donc, si $a > 0$, la droite $y = 0$ est asymptote du côté des x positifs seulement, mais il y a deux branches infinies situées de part et d'autre de cette droite. On voit facilement que l'axe des y est aussi une asymptote.

IV. Soit encore la courbe $y^2x^2 - 2y + a^2 = 0$.

On trouve une direction asymptotique $c = 0$ et on en tire facilement $d = 0$. Mais $y = 0$ n'est pas une asymptote parce que l'équation entre u et x' est

$$u^2 + a^2x'^2 - 2ux'^2 = 0\,;$$

l'origine est un point isolé de cette courbe. On montre d'une manière analogue qu'il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe des y.

Remarque. — Il est facile de traiter directement ces deux dernières courbes en résolvant leurs équations par rapport à x ou à y.

335. Asymptotes en coordonnées polaires. — Considérons une courbe dont l'équation est donnée en coordonnées polaires r et θ. Supposons qu'elle ait une branche infinie douée d'une asymptote. Soient δ la distance

du pôle à l'asymptote et α l'inclinaison de l'asymptote sur l'axe polaire. Menons par le pôle (fig. 6) la droite OP perpendiculaire sur l'asymptote et soit Q la projection d'un point M de la courbe sur OP. La distance QP du point M à l'asymptote ayant pour limite zéro, OQ tend vers OP ou δ ; on a donc

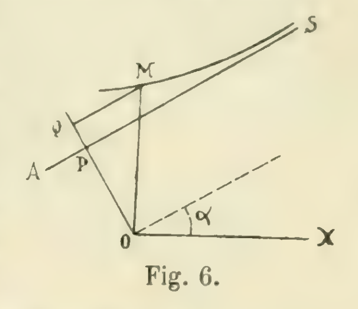


Fig. 6.

$$\lim \mathrm{OM} \sin(\mathrm{OMQ}) = \lim r \sin(\theta - \alpha) = \delta.$$

Comme r tend vers l'infini, $\sin(\theta - \alpha)$ et par conséquent $\theta - \alpha$ tendent vers 0. Donc $\lim \theta = \alpha$. *La direction de l'asymptote est la limite de celle du rayon vecteur quand le point* M *s'éloigne indéfiniment.*

Cette règle ayant fourni α, δ sera donné par l'équation

$$\delta = \lim. r \sin(\theta - \alpha).$$

La valeur de δ déterminée par cette équation sera positive ou négative suivant que θ, qui est infiniment voisin de α, sera $>$ ou $<$ α, ou autrement suivant que OP fait un angle droit positif ou négatif avec la direction α. Il n'y aura donc aucun doute sur la position de l'asymptote.

Si ces limites α et δ sont ainsi déterminées quand le point M s'éloigne à l'infini sur une branche de courbe, cette branche aura réellement pour asymptote la droite déterminée par les valeurs de α et δ, car, l'équation (8) ayant lieu, la distance du point M à cette droite tend vers 0.

Exemple. Soit l'équation focale d'une conique

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}.$$

Pour que r augmente indéfiniment, il faut que le dénominateur tende vers 0, donc $\cos \alpha = 1 : \varepsilon$, ce qui suppose $\varepsilon \geqslant 1$ et exclut l'ellipse. Si $\varepsilon > 1$, on a deux valeurs pour α et deux directions correspondantes, également inclinées sur l'axe polaire. Il vient alors, par la règle de l'Hospital,

$$\delta = \lim. r \sin(\theta - \alpha) = \lim \frac{p \sin(\theta - \alpha)}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p}{\varepsilon \sin \alpha}.$$

Si $\varepsilon = 1$, $\sin \alpha = 0$, donc la parabole n'a pas d'asymptote. Pour l'hyperbole, $\varepsilon > 1$, on a deux valeurs finies, dont les signes sont ceux de $\sin\alpha$,

$$\delta = \pm \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

et il y a deux asymptotes.

§ 3. Théorie du contact.
Courbes et surfaces osculatrices.

336. Contact des courbes planes. — Définition. *Deux courbes planes* (C) *et* (C′), *ayant en commun un point ordinaire* P, *ont un contact de l'ordre* n *au point* P, *lorsqu'à tout point* Q *de la courbe* (C) *infiniment voisin de* P, *on peut faire correspondre un point* Q′ *de la courbe* (C′) *tel que la distance* QQ′ *soit un infiniment petit d'ordre* $n+1$ *par rapport à* PQ (fig. 7).

Fig. 7.

Supposons que la courbe (C′) ait pour équation

$$(C') \qquad F(X, Y) = 0.$$

Soient alors (a, b) les coordonnées du point P, (x, y) celles d'un point Q de la courbe (C), (X, Y) celles d'un point Q′ de la courbe (C′), Q et Q′ tendant vers P.

Appelons ρ la distance QQ′ et (u, v) ses coefficients directeurs, on aura

$$X = x + u\rho, \qquad Y = y + v\rho.$$

En portant ces valeurs dans l'équation de la courbe (C′) et en développant suivant les puissances de ρ, on trouvera la relation

$$F(x + u\rho, y + v\rho) = F(x, y) + \rho\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \cdots = 0.$$

Mais, comme x, y sont infiniment voisins de a, b, cette relation peut s'écrire, en abrégé (ε étant infiniment petit),

$$F(x, y) + \rho\left(u\frac{\partial F}{\partial a} + v\frac{\partial F}{\partial b} + \varepsilon\right) = 0.$$

Le point $P(a, b)$ est, par hypothèse, un point ordinaire de (C′); donc F'_a et F'_b ne sont pas nuls tous les deux, et $(uF'_a + vF'_b)$ ne s'annule que pour la direction (u, v) de la tangente en P à (C′). Donc, si la direction de QQ′ n'a pas celle-là pour limite, l'équation précédente montre que $F(x, y)$ et la distance $\rho = $ QQ′ sont deux infiniment petits du même ordre.

Comme on peut toujours associer au point Q un point Q′ obtenu en coupant (C′) par une sécante QQ′ inclinée sur cette tangente à (C′) (fig. 7), on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes* (C) *et* (C') *aient au point* P *un contact de l'ordre* n, *est que la quantité* $F(x, y)$, *obtenue en portant dans le premier membre de l'équation de* (C') *les coordonnées* (x, y) *d'un point* Q *de* (C) *infiniment voisin de* P, *soit un infiniment petit de l'ordre* $n+1$ *par rapport à* PQ.

Nous allons transformer cette condition en nous plaçant dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur le mode de représentation des courbes.

Pour commencer, supposons la courbe (C) définie par une représentation paramétrique

$$(C) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = f(t).$$

Alors, par définition, un *point ordinaire* sera un point où l'une au moins des deux dérivées (par rapport à t) x', y' est différente de 0. En un point semblable, les différentielles dt et $ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2}$ sont donc toujours deux infiniment petits du même ordre.

Soient t_0 le paramètre du point P et $t_0 + dt$ celui du point Q. La distance PQ sera du même ordre que ds qui est lui-même du même ordre que dt. Donc, pour que les deux courbes (C) et (C') aient au point P un contact de l'ordre n, il faut et il suffit que l'expression

$$F(x, y) = F[\varphi(t_0 + dt), f(t_0 + dt)]$$

soit un infiniment petit de l'ordre $n+1$ par rapport à dt.

Posons, plus simplement,

$$\psi(t) = F[\varphi(t), f(t)];$$

on voit que le développement de $\psi(t_0 + dt)$ suivant les puissances de dt par la formule de Taylor devra commencer par le terme en dt^{n+1}. *Les conditions analytiques d'un contact de l'ordre n au moins sont donc en nombre* $n+1$, *savoir*

$$\psi(t_0) = \psi'(t_0) = \cdots = \psi^n(t_0) = 0.$$

Mais, pour que le contact soit de l'ordre n et non d'ordre plus élevé, il faut ajouter à ces conditions que $\psi^{n+1}(t_0)$ *ne soit pas nul.*

Ces conditions prennent une forme particulièrement simple lorsque les équations des deux courbes (C) et (C') peuvent être résolues par rapport à l'ordonnée et mises sous la forme

$$y = f(x), \qquad F(X, Y) = Y - f_1(X) = 0,$$

ce qui suppose qu'aucune des deux tangentes au point P ne soit parallèle à l'axe des y.

On a, dans ce cas, $t = x$,

$$\psi(x) = F[x, f(x)] = f(x) - f_1(x)$$

et, en appelant a l'abscisse du point P, les conditions du contact deviennent

$$f(a) - f_1(a) = 0, \qquad f'(a) - f'_1(a) = 0, \cdots f^n(a) - f_1^n(a) = 0.$$

D'où le théorème suivant :

Pour que deux courbes aient un contact de l'ordre n au moins, en un point donné où leur tangente n'est pas parallèle à l'axe des y, il faut et il suffit que l'ordonnée et ses n premières dérivées par rapport à l'abscisse aient les mêmes valeurs pour les deux courbes en ce point. Pour que le contact ne soit pas d'ordre supérieur à n, il faut, de plus, que les dérivées d'ordre n + 1 soient différentes pour les deux courbes.

Considérons enfin le cas où les courbes (C) et (C') ont pour équations

$$F(x, y) = 0, \qquad F_1(x, y) = 0.$$

Pour exprimer les conditions d'un contact de l'ordre n au moins pour $x = a$, il faut former, par les règles de dérivation des fonctions implicites, les équations qui déterminent les n premières dérivées des deux fonctions y de x définies par les deux équations précédentes. Cela fait en tout, avec ces deux dernières équations, $2(n + 1)$ équations entre y, y', y'',... et y^n. Ces $n + 1$ quantités étant les mêmes au point $x = a$ pour les deux courbes, on les éliminera et les $n + 1$ équations résultantes donneront les conditions du contact pour $x = a$.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que deux courbes qui ont un contact du premier ordre ou d'ordre supérieur sont nécessairement *tangentes* au point de contact, car, y' ayant la même valeur pour les deux courbes, elles ont même tangente.

THÉORÈME. — *Deux courbes qui ont un contact de l'ordre n se coupent au point de contact si n est pair et ne se coupent pas si n est impair.*

Soient, en effet, x, y les coordonnées d'un point variable de la courbe (C) exprimées en fonction de t ; $Y - f(x) = 0$ l'équation de la courbe (C') ; t_0 le paramètre du point de contact. Faisons $t = t_0 + dt$; l'expression

$$\psi(t_0 + dt) = y - f(x) = y - Y$$

est d'ordre $n+1$ par rapport à dt. Donc, si n est pair, $y - Y$ change de signe avec dt ; l'ordonnée de (C) surpasse l'ordonnée correspondante de (C') d'un côté du point de contact et est plus petite de l'autre : les deux courbes se coupent. Au contraire, si n est impair, il n'y a pas de changement de signe et les deux courbes ne se coupent pas.

337. Courbes planes osculatrices. — Supposons qu'on donne la courbe (C) et le point P sur cette courbe, mais que la courbe (C') soit seulement assujettie à faire partie d'une famille de courbes définie par une équation

$$(C') \qquad F(X, Y, a_1, a_2, \cdots a_{n+1}) = 0,$$

renfermant $n+1$ paramètres indéterminés. On peut se proposer de déterminer ces paramètres de manière que la courbe (C') ait au point P avec la courbe (C) un contact de l'ordre le plus élevé possible. La courbe (C') est alors, parmi toutes celles du système considéré, l'*osculatrice* de la courbe (C).

En général, $n+1$ paramètres distincts peuvent être assujettis à $n+1$ conditions. On peut donc les déterminer de manière à obtenir au point P un contact de l'ordre n au moins.

Pour fixer les idées, supposons les coordonnées x, y des points de (C) exprimées en fonction de t et posons, comme au n° précédent,

$$\psi(t) = F(x, y, a_1, a_2, \cdots a_{n+1}).$$

Les $n+1$ conditions du contact d'ordre n au point t seront

$$\psi(t) = \psi'(t) = \psi''(t) = \cdots = \psi^n(t) = 0.$$

En général, dans les applications, ce système de $n+1$ équations entre les $n+1$ indéterminées a n'est ni incompatible ni indéterminé et il détermine les éléments de l'osculatrice. L'osculatrice a un contact de l'ordre n si $\psi^{n+1}(t)$ ne s'annule pas et exceptionnellement un contact d'ordre plus élevé si cette dérivée s'annule aussi.

Supposons, comme cela arrive dans la plupart des applications, que les $n+1$ paramètres du système soient complètement déterminés, soit par les équations $\psi = \psi' = \cdots = \psi^n = 0$, soit par la condition de faire passer la courbe par $n+1$ points donnés. On aura le théorème suivant :

Théorème. — *La courbe* (C') *dépendant de* $n+1$ *paramètres qui est osculatrice à une courbe donnée* (C) *en un point également donné* P, *est*

la limite des courbes de son espèce qui passent par le point P *et par* n *autres points de la courbe* (C) *infiniment voisins du premier.*

Démonstration. — Les courbes (C) et (C′) restant définies comme ci-dessus, désignons par $t_0, t_1, t_2, \cdots t_n$ les paramètres du point P et de n points voisins sur la courbe (C). La condition que (C′) passe par ces points fournit les $n+1$ équations

$$\psi(t_0) = \psi(t_1) = \cdots = \psi(t_n) = 0.$$

Donc, en vertu du théorème de Rolle, dans les intervalles de ces $n+1$ racines de $\psi(t)$, se trouvent au moins n racines de $\psi'(t)$ et, par suite, $n-1$ de $\psi''(t)$, ··· et une de $\psi^n(t)$. Si l'on fait tendre $t_1, t_2, \cdots t_n$ vers t_0, toutes ces racines tendent aussi vers t_0. On retrouve donc, à la limite, le système d'équations

$$\psi(t_0) = \psi'(t_0) = \cdots = \psi^n(t_0) = 0,$$

qui déterminent l'osculatrice au point t_0.

338. Exemples. — I. *Droite osculatrice.* L'équation d'une droite

$$Y - aX - b = 0$$

renferme deux paramètres arbitraires a et b qui permettent d'établir en un point donné avec une courbe un contact du premier ordre. Soient x et y les coordonnées des points d'une courbe (C) ; prenons $t = x$ et considérons y comme fonction de x. Les éléments de la droite osculatrice au point x seront définis par les équations

$$\psi(x) = y - ax - b = 0, \qquad \psi'(x) = y' - a = 0.$$

Son coefficient angulaire est donc y'. *La droite osculatrice n'est autre que la tangente*, comme cela doit être d'après le théorème général précédent.

La tangente a donc généralement un contact du premier ordre avec la courbe et la courbe ne traverse pas sa tangente. Exceptionnellement, le contact sera d'ordre plus élevé, si l'on a

$$\psi''(x) = y'' = 0.$$

C'est ce qui arrive en un point d'inflexion. Donc, *en un point d'inflexion, le contact de la tangente avec la courbe est au moins du second ordre.*

II. *Cercle osculateur.* — L'équation d'un cercle

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 - R^2 = 0,$$

renferme trois paramètres qui permettent d'établir avec une courbe, en un point donné P, un contact du deuxième ordre. Ces trois paramètres permettent aussi de faire passer le cercle par trois points. Le cercle osculateur au point P d'une courbe plane est donc la limite d'un cercle passant par ce point et deux autres points infiniment voisins. C'est cette propriété qu'on a prise comme définition dans le premier volume. Le contact du cercle osculateur avec la courbe sera donc généralement du second ordre et le cercle osculateur traverse la courbe, sauf aux points exceptionnels où l'ordre du contact serait plus élevé.

III. *Parabole osculatrice.* — Il faut quatre points pour déterminer une parabole. La parabole osculatrice en un point P d'une courbe plane sera donc la limite des paraboles passant par ce point et trois autres points infiniment voisins. Elle aura donc, en général, avec la courbe un contact du troisième ordre.

329. Contact d'une courbe et d'une surface. — DÉFINITION. *Quand une courbe* (C) *(plane ou gauche) et une surface* (S) *ont en commun un point simple* P, *elles ont en ce point un contact de l'ordre* n, *si, à tout point* Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe, on peut associer un point* Q′ *de la surface tel que la distance* QQ′ *soit un infiniment petit de l'ordre* $n+1$ *par rapport à* PQ.

Soient (a, b, c) les coordonnées de P, (x, y, z) celles d'un point Q infiniment voisin de P sur (C), (X, Y, Z) celles d'un point Q′ infiniment voisin de P sur (S). Si l'on appelle ρ la distance QQ′ et u, v, w les coefficients directeurs de cette droite, on a

$$X = x + u\rho, \qquad Y = y + v\rho, \qquad Z = z + w\rho.$$

Supposons que la surface (S) ait pour équation

$$(S) \qquad F(X, Y, Z) = 0$$

et posons, en abrégé,

$$F'_x(a, b, c) = A, \qquad F'_y(a, b, c) = B, \qquad F'_z(a, b, c) = C.$$

Une au moins des trois quantités A, B, C est différente de 0, puisque le point P est un point ordinaire de (S).

Le point Q′ étant sur (S), on a

$$F(X, Y, Z) = F(x + u\rho, y + v\rho, z + w\rho) = 0,$$

ou, en désignant par ε une quantité qui tend vers 0 quand (x, y, z) tendent vers (a, b, c),

$$F(x, y, z) + \rho (Au + Bv + Cw + \varepsilon) = 0.$$

La quantité $Au + Bv + Cw$ n'est nulle que si la direction QQ' est parallèle au plan tangent mené à (S) au point P. Donc, si l'angle de cette droite avec ce plan ne tend pas vers 0, la distance $\rho = QQ'$ et l'expression $F(x, y, z)$ sont deux infiniment petits du même ordre.

Comme on peut toujours associer au point Q de la courbe (C) un point Q' de la surface (S) obtenu en menant par Q une sécante oblique à ce plan tangent, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une courbe* (C) *et une surface* (S) *aient, en un point ordinaire* P, *un contact de l'ordre* n, *il faut et il suffit que l'expression* $F(x, y, z)$ *obtenue en substituant dans le premier membre de l'équation de la surface les coordonnées* x, y, z *d'un point* Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe* (C), *soit un infiniment petit de l'ordre* $n + 1$ *par rapport à* PQ.

Si la courbe (C) est donnée par une représentation paramétrique

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

comme les dérivées x', y', z' ne s'annulent pas toutes en un point ordinaire, on montre, par un raisonnement semblable à celui du n° 336, que la condition d'un contact de l'ordre n en un point ordinaire $P(t_0)$ sera la suivante : *Si l'on pose* $\psi(t) = F(x, y, z)$ (x, y, z *étant fonctions de* t), *il faut et il suffit que* $\psi(t_0 + dt)$ *soit de l'ordre* $n + 1$ *par rapport à* dt *ou que l'on ait*

$$\psi(t_0) = \psi'(t_0) = \cdots = \psi^n(t_0) = 0, \qquad \psi^{n+1}(t_0) \gtrless 0.$$

Il faut donc $n + 1$ conditions pour qu'une courbe et une surface aient, en un point donné, un contact de l'ordre n au moins.

Théorème. — *La courbe* (C) *qui a, avec une surface* (S), *un contact d'ordre* n *en un point, traverse ou ne traverse pas* (S) *selon que* n *est pair ou impair.*

En effet, soient $Z - f(x, y) = 0$ l'équation de (S) ; x, y, z les coordonnées des points de (C) exprimées en fonction de t, et t_0 le paramètre du point de contact. Faisons $t = t_0 + dt$; l'expression

$$\psi(t_0 + dt) = z - f(x, y) = z - Z$$

est d'ordre $n + 1$ par rapport à dt. La courbe traverse ou ne traverse

pas la surface, suivant que $z - Z$ change ou ne change pas de signe avec dt, donc selon que n est pair ou impair.

340. Surfaces osculatrices en un point d'une courbe. — Considérons une famille de surfaces à $n + 1$ paramètres

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \cdots a_{n+1}) = 0.$$

On appelle *osculatrice*, en un point P d'une courbe (C), celle des surfaces de la famille précédente qui a avec la courbe un contact de l'ordre le plus élevé possible. Comme il faut généralement $n + 1$ conditions pour un contact de l'ordre n, elles déterminent les paramètres $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$; l'osculatrice, dans une famille de surfaces à $n + 1$ paramètres, a donc généralement avec la courbe un contact de l'ordre n.

Supposons que les $n + 1$ paramètres soient déterminés aussi bien par la condition du contact d'ordre n que par celle de passer par $n + 1$ points ; on aura, comme au n° 337, le théorème suivant :

Théorème — *La surface dépendant de $n + 1$ paramètres qui est osculatrice en un point donné* P *d'une courbe* (C), *est la limite des surfaces de son espèce passant par le point* P *et n autres points de la courbe* (C) *qui se rapprochent indéfiniment du point* P.

341. Plan osculateur. — L'équation d'un plan

$$F(X, Y, Z) = aX + bY + cZ + d = 0 \tag{1}$$

renferme trois paramètres arbitraires, qui permettent d'établir, en un point t d'une courbe (C) ayant pour équations

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

un contact du second ordre. Les conditions de ce contact sont

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(t) = ax + by + cz + d = 0 \\ \psi'(t) = ax' + by' + cz' = 0 \\ \psi''(t) = ax'' + by'' + cz'' = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent les éléments du plan osculateur au point t, pourvu que l'un au moins des déterminants

$$A = y'z'' - y''z', \qquad B = z'x'' - z''x', \qquad C = x'y'' - x''y'$$

ne soit pas nul. Nous supposerons d'abord cette condition réalisée.

Le plan osculateur a généralement un contact du second ordre et,

par conséquent, la courbe traverse son plan osculateur. Pour que cet ordre soit plus élevé, il faut que

$$\psi'''(t) = ax''' + by''' + cz''' = 0.$$

On peut alors éliminer a, b, c entre les trois équations $\psi' = \psi'' = \psi''' = 0$, ce qui donne

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

On appelle *plans osculateurs stationnaires* ceux qui sont menés aux points t où $D = 0$. Ils ont avec la courbe un contact du troisième ordre au moins, et généralement la courbe ne les traverse pas. Au point de contact t, la torsion $1 : T$ de la courbe est nulle, en vertu de la formule

$$(3) \qquad \frac{1}{T} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

où le dénominateur diffère de 0 par hypothèse.

Le plan osculateur, étant déterminé par la condition d'avoir avec la courbe un contact du second ordre, l'est aussi par la condition de passer par le point t et deux autres points de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier. C'est la propriété qui nous a servi de définition dans le premier volume.

Remarque : *Cas où* $A = B = C = 0$. — Dans ce cas, pour déterminer le plan osculateur, il faut combiner avec les équations $\psi(t) = 0$ et $\psi'(t) = 0$ la première des équations $\psi''(t) = 0$, $\psi'''(t) = 0, \ldots$ qui n'en est pas une conséquence. Soit $\psi^{n}(t) = 0$ cette première équation ; l'équation du plan osculateur prendra la forme exceptionnelle

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x^{(n)} & y^{(n)} & z^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Son contact sera d'ordre $n + 1$, à moins que $\psi^{n+1}(t)$ ne soit encore nul, ce qui élèverait l'ordre du contact. Les raisonnements précédents supposent encore que x', y', z' ne s'annulent pas à la fois. Mais on sait que cela ne peut arriver en un point ordinaire de la courbe C.

En un point où $A = B = C = 0$, le plan osculateur est *stationnaire*, car on a

$$D = Ax''' + By''' + Cz''' = 0.$$

Son contact est d'ordre supérieur au second. Mais on ne peut plus affirmer que la torsion soit nulle, car la formule (3) prend la forme $0 : 0$.

Théorème. — *Une courbe dont tous les plans osculateurs sont stationnaires est plane.*

En effet, le déterminant D est un wronskien $W(x', y', z')$. L'équation $D = W = 0$ exprime qu'il existe, entre x', y', z', une relation linéaire à coefficients constants (nº 149)

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0.$$

On en tire, en intégrant, $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, ce qui est l'équation d'un plan.

Remarque. En vertu de ce théorème, toute courbe dont la torsion est constamment nulle est une courbe plane, car, dans ce cas, on a $D = 0$, en vertu de la formule (3). Ce résultat a été établi d'une autre manière dans le premier volume.

342. Contact de deux courbes de l'espace. — Définition. *Soient* (C) *et* (C') *deux courbes de l'espace ayant en commun un point ordinaire* P. *Les deux courbes ont au point* P *un contact d'ordre n, lorsqu'à tout point* Q *de la courbe* (C) *infiniment voisin de* P, *on peut associer un point* Q' *de la courbe* (C') *tel que la distance* QQ' *soit un infiniment petit de l'ordre $n+1$ par rapport à la distance* PQ.

Soient (a, b, c) les coordonnées de P, (x, y, z) celles d'un point Q infiniment voisin de P sur (C), (X, Y, Z) celle d'un point Q' infiniment voisin de P sur (C'). Soient enfin

$$F(X, Y, Z) = 0, \qquad F_1(X, Y, Z) = 0,$$

les équations de la courbe (C').

Appelons ρ la distance QQ', (u, v, w) ses coefficients directeurs, de sorte que

$$X = x + u\rho, \qquad Y = y + v\rho, \qquad Z = z + w\rho.$$

Le point Q' étant sur (C'), on a

$$F(x + u\rho, y + v\rho, z + w\rho) = 0, \qquad F_1(x + u\rho, y + v\rho, z + w\rho) = 0,$$

ou, en désignant par ε et ε_1 des quantités qui tendent vers 0 quand (x, y, z) tendent vers (a, b, c),

$$F(x, y, z) + \rho\left(u\frac{\partial F}{\partial a} + v\frac{\partial F}{\partial b} + w\frac{\partial F}{\partial c} + \varepsilon\right) = 0,$$

$$F_1(x, y, z) + \rho\left(u\frac{\partial F_1}{\partial a} + v\frac{\partial F_1}{\partial b} + w\frac{\partial F_1}{\partial c} + \varepsilon_1\right) = 0.$$

Si la direction (u, v, w) n'est pas celle de la tangente en P à la courbe (C'), une au moins des deux quantités

$$u\frac{\partial F}{\partial a} + v\frac{\partial F}{\partial b} + w\frac{\partial F}{\partial c}, \qquad u\frac{\partial F_1}{\partial a} + v\frac{\partial F_1}{\partial b} + w\frac{\partial F_1}{\partial c},$$

est différente de 0. Donc, si la direction QQ' n'a pas pour limite celle de cette tangente, la distance $\rho = QQ'$ est un infiniment petit de même ordre que l'une au moins des deux expressions

$$F(x, y, z), \qquad F_1(x, y, z),$$

l'autre pouvant être un infiniment petit d'ordre plus élevé.

Comme on peut toujours associer au point Q de la courbe (C) un point Q' de la courbe (C') obtenu en coupant celle-ci par un plan mené par Q obliquement à la tangente en P à (C'), on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que deux courbes* (C) *et* (C') *aient en un point ordinaire* P *un contact d'ordre* n, *il faut et il suffit que les deux expressions* $F(x, y, z)$ *et* $F_1(x, y, z)$, *obtenues en substituant dans les premiers membres des équations de* (C') *les coordonnées d'un point* Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe* (C), *soient infiniment petites de l'ordre* $n+1$ *par rapport à la distance* PQ, *l'une des deux expressions au moins n'étant pas d'ordre plus élevé.*

Supposons la courbe (C) définie par une représentation paramétrique

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t)$$

et posons, x, y, z étant fonctions de t,

$$\psi(t) = F(x, y, z), \qquad \psi_1(t) = F_1(x, y, z).$$

Les conditions d'un contact d'ordre n au point t seront que $\psi(t+h)$ et $\psi_1(t+h)$ soient d'ordre $n+1$ par rapport à h, l'une des expressions seulement pouvant être d'ordre plus élevé. En conséquence, on devra avoir

$$\psi(t) = \psi'(t) = \psi''(t) = \cdots \psi^{n}(t) = 0,$$
$$\psi_1(t) = \psi_1'(t) = \psi_1''(t) = \cdots \psi_1^{n}(t) = 0,$$

et, de plus, une des deux dérivées $\psi^{n+1}(t)$, $\psi_1^{n+1}(t)$ ne sera pas nulle, sinon le contact serait d'ordre plus élevé.

Il faut donc $2n + 2$ relations pour exprimer que deux courbes de l'espace ont, en un point donné, un contact d'ordre n au moins.

243. Courbes osculatrices dans l'espace. — Les courbes osculatrices dans l'espace sont définies de la même manière que dans le plan. Il y a toutefois une différence à signaler. Si un système de courbes (C′) dépend de $2n + 2$ paramètres, ceux-ci pourront généralement être déterminés par la condition d'établir avec une courbe donnée (C), en un point donné P, un contact de l'ordre n. Mais, si les équations des courbes (C′) ne renferment que $2n + 1$ paramètres, on ne peut plus établir qu'un contact d'ordre $n - 1$, n'imposant que $2n$ conditions, et il reste un paramètre arbitraire. Dans ce cas, il y aura donc une infinité d'osculatrices de l'espèce (C′), ou il n'y en aura pas, comme on voudra l'entendre.

Supposons que l'on considère une famille de courbes (C′) à $2n + 2$ paramètres, et admettons que ces paramètres puissent être déterminés complètement, soit, d'une part, par la condition d'établir en un point donné P d'une courbe donnée (C) un contact de l'ordre n, soit, d'autre part, par la condition de faire passer la courbe (C′) par $n + 1$ points donnés. On démontrera, comme au n° 337, le théorème suivant :

Théorème. — *La courbe* (C′) *osculatrice en un point* P *de la courbe* (C), *est la limite des courbes* (C′) *qui passent par le point* P *et par n autres points de la courbe* (C) *qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

344. Exemples. — I. *Droite osculatrice.* Les équations d'une droite de l'espace renferment quatre paramètres arbitraires, permettant d'établir un contact du premier ordre avec une courbe (C) en un point donné P. Suivant le théorème précédent, cette droite est la limite d'une sécante passant par P et un point de (C) infiniment voisin de P. La droite osculatrice se confond ainsi avec la tangente. La tangente a donc généralement un contact du premier ordre avec la courbe.

II. *Cercle osculateur.* — Les équations d'un cercle dans l'espace

dépendent de 6 paramètres permettant d'établir un contact du second ordre ou de faire passer le cercle par trois points. Le *cercle osculateur* en un point P d'une courbe gauche est donc la limite du cercle passant par ce point et deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier. Le cercle osculateur a généralement avec la courbe un contact du second ordre.

§ 4. Enveloppes des courbes planes.

345. Definition des points-limites et de l'enveloppe. — Nous allons considérer une famille de courbes planes définies par une équation

$$(1) \qquad F(x, y, \alpha) = 0,$$

contenant un paramètre arbitraire α, donc une famille contenant une infinité simple de courbes. Nous admettrons que F est une fonction uniforme et continue ainsi que ses dérivées partielles. De la sorte, à chaque valeur de α correspond une courbe de la famille et une seule; et nous supposerons que ces courbes ne possèdent que des points singuliers isolés.

Considérons, en particulier, la courbe (α), c'est-à-dire celle qui correspond à la valeur α du paramètre. Soit M un point de cette courbe. En général, la distance du point M à la courbe infiniment voisine $(\alpha + d\alpha)$ est de l'ordre de $d\alpha$. Si cette distance est d'ordre supérieur à $d\alpha$ et que le point M soit un point *ordinaire* de la courbe (α), on dit que c'est un *point-limite* de la courbe (α). *L'enveloppe de la famille de courbes est le lieu géométrique des points-limites des courbes du système. Celles-ci prennent, par opposition, le nom d'enveloppées.*

Un point-limite de la courbe (α) est donc un point ordinaire commun à cette courbe et à la courbe $(\alpha + d\alpha)$, abstraction faite des infiniment petits d'ordre supérieur à $d\alpha$. Ses coordonnées doivent donc satisfaire aux deux équations

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad F(x, y, \alpha) + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

ou, ce qui revient au même, aux deux équations

$$(2) \qquad F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Réciproquement, un point *ordinaire* M dont les coordonnées satisfont à ces deux équations est un *point-limite*. En effet, si l'on appelle

ρ la distance du point M au point M′ le plus rapproché de la courbe $(\alpha + d\alpha)$, et u, v les coefficients directeurs de ρ, on a

$$F(x + u\rho, y + v\rho, \alpha + d\alpha) = 0\,;$$

ou, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier en ρ et $d\alpha$,

$$\rho\left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v\right) = 0.$$

Mais, en un point ordinaire, le coefficient de ρ n'est pas nul (la direction u, v n'étant pas celle de la tangente). Donc ρ est nul, abstraction faite des termes d'ordre supérieur au premier.

Pour qu'il y ait des points-limites, il faut donc que les équations $F = 0$ et $F'_\alpha = 0$ soient compatibles. Alors les coordonnées des points-limites sont des fonctions de α :

$$(3) \qquad x = x(\alpha), \qquad y = y(\alpha),$$

qu'on obtient en résolvant les deux équations ; et les équations (**3**) fournissent une représentation paramétrique de l'enveloppe. Dans la théorie qui va suivre, nous n'étudierons que des arcs de l'enveloppe dépourvus de points singuliers. Il sera donc entendu qu'une au moins des deux dérivées x', y' par rappport à α est différente de zéro.

Pour obtenir l'équation de l'enveloppe sous la forme habituelle, il faut éliminer α entre les équations (**3**) ou, ce qui revient au même, entre les équations (**2**).

Mais il importe d'observer que cette élimination peut introduire une courbe étrangère à l'enveloppe. En effet, les points singuliers des courbes (α) (qui ne sont pas des points-limites) satisfont aussi aux équations (**2**), car leurs coordonnées sont des fonctions de α qui vérifient les trois équations $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, donc aussi $F'_\alpha = 0$ qu'on obtient en dérivant totalement la première équation par rapport à α en ayant égard aux deux autres. De là, la règle suivante :

RÈGLE. — *L'enveloppe de la famille* $F(x, y, \alpha) = 0$ *s'obtient en éliminant* α *entre cette équation et sa dérivée par rapport au paramètre,* $F'_\alpha = 0$. *Mais on obtient, en même temps, le lieu des points singuliers des courbes de la famille, s'il y en a.*

Remarque sur les points-limites. — Si deux courbes infiniment voisines (α) et $(\alpha + d\alpha)$ se coupent, les coordonnées des points d'intersection vérifient les deux équations $F(x, y, \alpha) = 0$, $F(x, y, \alpha + d\alpha) = 0$ et, par suite, à la limite, l'équation

$$\lim \frac{F(x, y, \alpha + d\alpha) - F(x, y, \alpha)}{d\alpha} = F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Donc les *positions limites des points d'intersection* de la courbe (α) avec la courbe infiniment voisine ($\alpha + d\alpha$) sont des *points-limites* de la courbe (α), à moins que ce ne soient des points singuliers.

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, un point-limite n'est pas toujours une limite de point d'intersection. Nous approfondirons cette question tout à l'heure (n° 347).

346. Théorème. — *Chaque enveloppée touche son enveloppe au point-limite* M.

Les coordonnées des points de l'enveloppe sont des fonctions (3) de α qui vérifient l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$. Dérivons totalement par rapport à α ; il vient, en tout point de l'enveloppe, puisque $F'_\alpha = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Cette équation ne peut être identique, car, en un point ordinaire, une au moins des dérivées F'_x, F'_y n'est pas nulle. Les coefficients directeurs x', y' de la tangente à l'enveloppe sont donc déterminés par la même équation que ceux de la tangente à l'enveloppée au même point, et les deux tangentes se confondent.

Réciproquement, si l'on cherche une courbe (E) *à laquelle les enveloppées restent tangentes, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, les coordonnées des points de (E) peuvent être considérées comme des fonctions du paramètre α satisfaisant à l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$. Celle-ci, dérivée totalement, donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

car $x'F'_x + y'F'_y = 0$ (les tangentes à l'enveloppée et à la courbe E étant les mêmes). On retrouve donc, pour déterminer (E), les deux équations $F = 0$, $F'_\alpha = 0$ de l'enveloppe.

347. Ordre du contact de l'enveloppe et de l'enveloppée. Relation de cet ordre avec la nature des points-limites. — Considérons la famille de courbes

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

ayant une enveloppe

$$x = \varphi(\alpha), \qquad y = \psi(\alpha).$$

L'enveloppe et l'envelopée se touchant, ont un contact qui sera généralement du premier ordre, c'est-à-dire que l'expression

$$F[\varphi(\alpha + d\alpha), \psi(\alpha + d\alpha), \alpha]$$

sera du second ordre par rapport à $d\alpha$ (nº 366).

Mais, exceptionnellement, cette expression peut être d'ordre plus élevé, et l'on sait (nº 366) que, si elle est d'ordre $n + 1$, le contact est d'ordre n.

D'après un théorème général (nº 336) si l'ordre du contact est impair, l'enveloppée ne traverse pas l'enveloppe, tandis qu'elle la traverse si l'ordre est pair.

Quand les enveloppées ne traversent pas l'enveloppe, et c'est le cas normal (l'ordre normal du contact étant 1), elles sont situées d'un seul et même côté de l'enveloppe (fig. 7), ce qui justifie leur nom. Dans ce

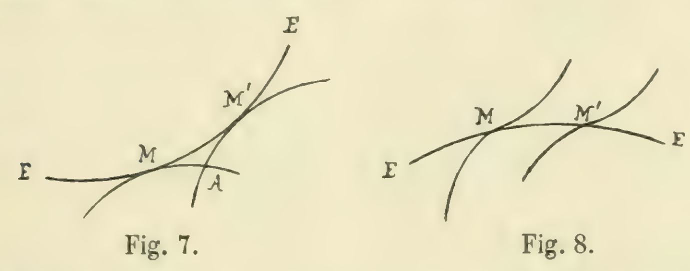


Fig. 7. Fig. 8.

cas, les *points-limites* sont des *points d'intersection limites*, car deux enveloppées qui touchent l'enveloppe en deux points infiniment voisins M et M′ se coupent aussi en un point infiniment voisin A (fig. 7).

Quand, l'ordre du contact étant pair, les enveloppées traversent l'enveloppe, leur nom d'enveloppée ne se justifie que par extension et les points-limites ne sont plus des limites d'intersection. En effet, deux enveloppées qui touchent l'enveloppe aux deux points infiniment voisins M et M′ (fig. 8) sont séparées par l'arc MM′ et ne peuvent se couper.

Voici deux exemples très simples de ces deux cas :

1° Toute courbe plane peut être considérée comme l'enveloppe de ses tangentes. Les tangentes ne traversent pas l'enveloppe et les points-limites sont les points d'intersection limites de deux tangentes infiniment voisines.

2° Toute courbe plane peut aussi être considérée comme l'enveloppe de ses cercles osculateurs. Mais ces cercles ont un contact du second ordre et traversent la courbe. Deux cercles infiniment voisins ne se coupent pas et les points-limites ne sont pas des limites d'intersection.

Considérons encore les paraboles ($n > 1$)

$$F(x, y, \alpha) = y - (x - \alpha)^n = 0.$$

Elles ont pour enveloppe l'axe des x, car, en dérivant, il vient.

$$x = \alpha, \text{ d'où } y = 0.$$

Comme on a, dans ce cas-ci,

$$F(\alpha + d\alpha, 0, \alpha) = - d\alpha^n$$

le contact est d'ordre pair ou impair suivant que $n - 1$ est pair ou impair. Si n est impair, les paraboles ne se coupent pas et l'enveloppe est le lieu de leurs points d'inflexion.

348. Calcul de l'enveloppe pour d'autres formes d'équations. — I. Il arrive souvent que l'on doive chercher l'enveloppe d'une courbe $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, dont l'équation renferme deux paramètres liés par la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Considérant β comme une fonction de α définie par cette relation, on est ramené au cas précédent. On doit, pour obtenir l'enveloppe, éliminer α, β, et $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les quatre équations :

$$F = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 ;$$

ou, ce qui revient au même, α et β entre les trois équations :

$$(4) \qquad F = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{d(F, \varphi)}{d(\alpha, \beta)} = 0,$$

dont la dernière provient de l'élimination de $d\beta : d\alpha$ entre les deux dernières équations du groupe précédent.

II. La courbe dont on cherche l'enveloppe peut aussi être donnée par une représentation paramétrique

$$(5) \qquad x = \varphi(t, \alpha), \qquad y = \psi(t, \alpha),$$

t désignant la variable indépendante sur la courbe. On revient encore au cas ordinaire en considérant, dans la première équation, t comme une fonction de y et de α définie par la seconde équation. Pour former l'équation de l'enveloppe, on est conduit à éliminer α, t et $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$ entre les équations (5) et les deux suivantes :

$$(6) \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \qquad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

ou, ce qui revient au même, à éliminer t et α entre les équations (5) et l'équation unique

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(t, \alpha)} = 0,$$

provenant de l'élimination immédiate de la dérivée de t entre les équations (6).

349. Exemples. — Considérons une famille à deux paramètres α et β

$$\frac{x^m}{\alpha^m}+\frac{y^m}{\beta^m}=1 \qquad \text{avec la condition} \qquad \frac{\alpha^p}{a^p}+\frac{\beta^p}{b^p}=1.$$

On dérive par rapport à α en considérant β comme une fonction de α et, en éliminant $d\beta : d\alpha$, il vient facilement

$$\frac{x^m}{\alpha^m}:\frac{\alpha^p}{a^p}=\frac{y^m}{\beta^m}:\frac{\beta^p}{b^p}.$$

On voit, par la théorie des fractions égales, que chacun de ces rapports est encore égal à 1 ; d'où l'on conclut

$$\frac{x^m}{a^m}=\frac{\alpha^{m+p}}{a^{m+p}}, \qquad \frac{y^m}{b^m}=\frac{\beta^{m+p}}{b^{m+p}}$$

et en éliminant α et β,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}}=1.$$

C'est l'équation de l'enveloppe. Elle donne lieu à des cas particuliers intéressants.

1° Si $m=1$, $p=2$, $b=a$, on trouve l'enveloppe d'une droite de longueur constante a dont les extrémités s'appuient sur deux axes rectangulaires. C'est l'*astroïde*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

2° Si $m=2$, $p=1$, $b=a$, la courbe variable est une ellipse décrite par un des points de la droite précédente et son enveloppe est la même que celle de cette droite.

3° Si $m=2$, $p-2$, la courbe variable est une ellipse dont les sommets sont les projections des points d'une ellipse fixe sur ses axes. L'enveloppe est un système de quatre droites

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1.$$

350. Solutions singulières des équations différentielles. — Considérons une équation différentielle du premier ordre

$$f(x, y, y')=0$$

où la fonction f est uniforme et continue ainsi que ses dérivées par rapport à y et à y'. On en tire une ou plusieurs valeurs de la forme

$$y' = \psi(x, y).$$

On sait d'ailleurs (nº 121) que, le long d'une solution singulière, ψ'_y doit être infini. Or, il vient, par la règle de dérivation des fonctions implicites

$$\psi'_y = - f'_y : f'_{y'}$$

Les dérivées partielles étant continues, une solution singulière devra vérifier l'équation

$$f'_{y'}(x, y, y') = 0.$$

Mais si l'on différentie l'équation $f = 0$ en tenant compte de la précédente, on trouve $f'_x + y' f'_y = 0$. Donc les éléments x, y et y' d'une solution singulière doivent vérifier les trois équations

$$f = 0, \qquad f'_{y'} = 0, \qquad f'_x + y' f'_y = 0.$$

En général, ces trois équations ne pourront pas se vérifier pour une suite continue de valeurs de x, y et y', mais seulement pour des valeurs isolées, et il n'y aura pas de solution singulière.

La recherche des solutions singulières peut aussi se faire au point de vue des courbes enveloppes. Supposons que l'intégrale générale de l'équation différentielle ait été mise sous la forme

$$F(x, y, C) = 0$$

où la fonction F est uniforme. Considérons un domaine déterminé du plan xy tel qu'on puisse mener, par chacun de ses points, une intégrale particulière de chaque équation $y' = \psi(x, y)$. S'il existe une solution singulière, ce ne peut être qu'une *enveloppe* d'une famille d'intégrales particulières, car, en vertu de l'équation différentielle, la solution singulière a, en chaque point, même tangente qu'une intégrale particulière passant par ce point. Donc, s'il existe une solution singulière, on la trouvera en cherchant l'enveloppe de la famille représentée par l'intégrale générale, donc en éliminant C entre $F = 0$ et $F'_C = 0$.

Il semblerait, d'après cela, qu'une équation du premier ordre ait en général une solution singulière, ce qui est contraire au résultat établi précédemment.

Cette contradiction apparente est facile à expliquer. L'élimination de C entre $F = 0$ et $F'_C = 0$ ne donnera pas une enveloppe mais le lieu des points singuliers des intégrales particulières. Il faut en conclure qu'à une équation différentielle *arbitraire* correspond une famille de courbes jouissant de propriétés *spéciales* au point de vue des enveloppes, tandis qu'à une famille *arbitraire* de courbes correspond une équation différentielle *spéciale* ayant une solution singulière.

L'*équation de Clairaut* $y = px + \varphi(p)$, par exemple, qui a pour intégrale générale (n° 141)

$$y = Cx + \varphi(C),$$

admet, comme on le sait, une intégrale singulière. On vérifie immédiatement que c'est l'*enveloppe* des droites représentées par l'intégrale générale.

Exercices.

1. *Enveloppe d'une droite.* — Les axes étant rectangulaires, on met l'équation d'une droite mobile sous la forme normale

$$(1) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha - f'(\alpha) = 0.$$

Le point-limite est à l'intersection de cette droite avec

$$(2) \qquad -x \sin \alpha + y \cos \alpha - f(\alpha) = 0$$

et on obtient ses cordonnées x, y en fonction de α par la résolution du système. Montrer : 1° que la seconde équation est celle de la normale à l'enveloppe (E) de la droite (1) ; 2° que l'enveloppe de la droite (2) est la développée de (E) ; 3° que le rayon de courbure R et la différentielle ds de l'arc de (E) sont

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \pm\ [f(a) + f''(\alpha)]\, d\alpha,$$

d'où la *formule de rectification de Legendre*

$$s = \pm\ [f'(\alpha) + \int f(\alpha)\, d\alpha]$$

2. *Enveloppe d'un cercle.* — Soit le cercle (a, b, R fonctions de α)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Les points-limites sont à l'intersection du cercle et de la droite

$$(D) \qquad (x - a)\, a' + (y - b)\, b' - RR' = 0.$$

Cette droite est perpendiculaire à la tangente MT à la courbe (C) décrite par le centre M du cercle, et sa distance au centre est égale à

$$\frac{RR'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} = R\frac{dR}{ds}$$

s étant l'arc de la courbe (C) :

1° Si $|\, dR \,| < |\, ds \,|$, la droite D coupe le cercle en deux points et il y a deux branches à l'enveloppe.

En particulier, si R est constant, la droite D passe par le centre et

l'enveloppe se compose de deux branches obtenues en portant sur la normale à la courbe (C), de part et d'autre du point M, la longueur constante R.

2° Si $|dR| > |ds|$, la droite et le cercle ne se coupent pas et il n'y a pas d'enveloppe.

3° Si $|dR| = |ds|$, la droite D est tangente au cercle au point-limite (donc aussi à l'enveloppe) et la normale à l'enveloppe est tangente à la courbe (C). Dans ce cas, *le cercle variable est osculateur à son enveloppe* : la condition nécessaire et suffisante pour cela est donc $|dR| = |ds|$.

3. *Caustiques.* — La caustique d'une courbe (C) pour un point lumineux A est l'enveloppe des rayons émanés de A et réfléchis sur (C). Montrer qu'elle est la développée de la podaire, par rapport au même point, de la courbe (C). En déduire la relation

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{r} = \frac{2}{R \cos i},$$

r étant le rayon incident AP, l le rayon réfléchi terminé au point où il touche son enveloppe, R le rayon de courbure de (C), i l'angle d'incidence.

4. Montrer que la *caustique d'un cercle* par rapport à un point de la circonférence est une *cardioïde* ; celle par rapport à un point à l'infini (rayons parallèles) une *épicycloïde* à deux rebroussements.

§ 5. Enveloppes des surfaces et des courbes de l'espace.

351. Enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre. — La théorie est analogue à celle des enveloppes de courbes planes, ce qui nous permet d'abréger. Soit une famille de surfaces

$$F(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{1}$$

On appelle *caractéristique* de la surface (α) le lieu des *points-limites* de cette surface, c'est-à-dire le lieu des points *ordinaires* dont la distance à la surface infiniment voisine ($\alpha + d\alpha$) est d'ordre supérieur à $d\alpha$. En général, et nous supposerons qu'il en est ainsi, ce lieu est une ligne définie par les deux équations

$$F = 0, \qquad F'_\alpha = 0. \tag{2}$$

Si la surface ($\alpha + d\alpha$) coupe la surface (α), la limite de la ligne d'intersection est une caractéristique ; mais il peut arriver, par exception, qu'une caractéristique ne soit pas une limite d'intersection.

L'enveloppe de la famille de surfaces est le lieu des caractéristiques et chaque surface de la famille prend le nom d'*enveloppée.*

On remarque, comme pour les courbes planes, que les cordonnées des points singuliers satisfont aussi aux équations (2) et l'on est conduit à la règle suivante :

Règle. — *L'équation de l'enveloppe d'une famille de surfaces* $F = 0$ *s'obtient en éliminant le paramètre* α *entre l'équation* $F = 0$ *et sa dérivée (rapport au paramètre)* $F'_\alpha = 0$. *Mais on obtiendra, en même temps, le lieu des points singuliers s'il y en a.*

Théorème. — *Chaque enveloppée touche son enveloppe tout le long de la caractéristique correspondante.*

Les coefficients directeurs de la normale à l'enveloppée, en un point ordinaire, sont F'_x, F'_y et F'_z. On peut considérer aussi $F = 0$ comme l'équation de l'enveloppe, à condition d'y remplacer α par sa valeur en x, y, z tirée de $F'_\alpha = 0$. Donc les coefficients directeurs de la normale à l'enveloppe sont $F'_x + F'_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \cdots$ Mais F'_α s'annule sur l'enveloppe, de sorte que ces coefficients ont les mêmes valeurs que pour l'enveloppée. Donc l'enveloppe et l'enveloppée ont même normale et, par suite, même plan tangent le long de la caractéristique commune.

Réciproquement, si l'on cherche une surfacc (E) *qui touche, en chacun de ses points, une des surfaces de la famille et que cette surface existe, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, on remarque d'abord que la surface (E) doit toucher chacune des surfaces (α) le long d'une courbe, car, si elle ne les touchait qu'en des points isolés, le lieu de ces points serait une courbe et non une surface.

Maintenant je dis que ces lignes de contact sont les *caractéristiques* c'est-à-dire qu'elles sont formées par les *points-limites* des surfaces (α). En effet, soit M un point de contact de (E) avec la surface particulière (α_0). Menons par M un plan quelconque coupant les surfaces suivant des sections que nous appellerons aussi (E) et (α). La section (E) est tangente aux sections planes (α). C'est donc leur enveloppe et M est un point-limite (au sens des enveloppes planes) pour la section (α_0) qui passe par ce point ; sa distance à la section ($\alpha_0 + d\alpha$), donc aussi à la surface ($\alpha_0 + d\alpha$), est d'ordre supérieur à $d\alpha$: c'est dire que M est aussi un point-limite pour la surface (α_0).

352. Enveloppe d'une famille de surfaces à deux paramètres. — Considérons maintenant une famille doublement infinie de surfaces, c'est-à-dire dépendant de deux paramètres arbitraires α, β,

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Un *point-limite* de la surface (α, β) est un point ordinaire tel que sa distance à toute surface infiniment voisine $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ soit un infiniment petit d'ordre supérieur à $|d\alpha| + |d\beta|$. On en conclut que ses coordonnées doivent vérifier les trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Nous admettrons donc que ces trois équations définissent des points dont les coordonnées soient des fonctions continues de α, β.

L'enveloppe de la famille est le lieu géométrique de ces points-limites. Son équation s'obtient en éliminant α et β entre les trois équations précédentes.

On montre, comme précédemment, que *chaque enveloppée touche son enveloppe en chacun de ses points-limites.*

Réciproquement, *si l'on cherche une courbe* (E) *qui touche toutes les courbes de la famille et si cette courbe existe, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, on peut considérer les coordonnés des points de (E) comme des fonctions x, y, z de α, β, assujetties à vérifier l'équation $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. On en tire, en dérivant par rapport à α puis à β,

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'_\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} y'_\alpha + \frac{\partial F}{\partial z} z'_\alpha + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'_\beta + \frac{\partial F}{\partial y} y'_\beta + \frac{\partial F}{\partial z} z'_\beta + \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Mais ces équations se réduisent à $\frac{dF}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$ dans l'hypothèse où (E) touche l'enveloppée au point (x, y, z), car alors x'_α, ... et x'_β, ... étant les coefficients directeurs de deux tangentes à (E), sont aussi ceux de deux tangentes à l'enveloppée et les termes qui contiennent ces coefficients se détruisent. On retrouve donc les trois équations de l'enveloppe.

353. Enveloppe d'une famille de courbes dans l'espace. — Considé-

rons une famille de courbes de l'espace dépendant d'un paramètre arbitraire α et définie par les deux équations

$$(3) \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Si l'on appelle encore *point-limite* de la courbe (α) un point *ordinaire* tel que sa distance à la courbe infiniment voisine $(\alpha + d\alpha)$ soit un infiniment petit d'ordre supérieur à $d\alpha$, on voit, comme dans le cas des courbes planes, que leurs coordonnées doivent vérifier les deux équations

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

En général, les équations (3) et (4) sont incompatibles, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α, et il n'y a pas de points-limites. Mais, s'il existe des points-limites dont la position varie d'une manière continue avec α, autrement dit, si les équations (3) et (4) admettent un système de solutions communes x, y, z fonctions continues de α, le lieu de ces points-limites s'appelle l'*enveloppe* de la famille de courbes.

D'après cela, une famille de courbes de l'espace n'admet généralement pas d'enveloppe.

Théorème. — *Si une famille de courbes admet une enveloppe, chaque enveloppée touche l'enveloppe au point-limite correspondant.*

La démonstration est analogue à celle donnée pour les enveloppes de courbes planes.

Réciproquement, s'il existe une courbe (E) *qui touche, en chacun de ses points, une des courbes de la famille, cette courbe n'est autre que l'enveloppe.*

En effet, les coordonnées x, y, z des points M de la courbe (E) seront des fonctions de α, assujetties à vérifier les équations (3). Si l'on dérive totalement ces équations par rapport à α, il vient (les accents désignant les dérivées)

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

Mais les termes en x', y', z' se détruisent, parce que la tangente à la courbe (E) est la même qu'à l'enveloppée par hypothèse. Ces équations se réduisent donc à $F'_\alpha = 0$, $\Phi'_\alpha = 0$. On retrouve donc,

pour déterminer la courbe (E), les quatre équations qui déterminent l'enveloppe.

354. Enveloppe de caractéristiques (Arête de rebroussement). — Une classe importante de courbes ayant une enveloppe est celle des caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre $F(x, y, z, \alpha) = 0$. Les quatre équations (3) et (4) se réduisent effectivement à trois seulement

$$F = 0, \qquad F'_{\alpha} = 0, \qquad F''_{\alpha} = 0.$$

Les valeurs de x, y, z généralement fonctions de α que l'on en tire, définissent une courbe qui touche toutes les caractéristiques et qu'on appelle l'*arête de rebroussement* [1] de la surface enveloppe.

355. Surface enveloppe d'une congruence de courbes. — On donne le nom de congruence à un ensemble de courbes dépendant de deux paramètres arbitraires α et β. Elle sera définie par deux équations :

$$(5) \qquad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Considérons une courbe particulière $[\alpha, \beta]$. On peut concevoir qu'elle fasse partie d'une famille à un paramètre en posant une relation $\beta = \varphi(\alpha)$, compatible avec les paramètres particuliers de la courbe. On peut, en général, choisir cette dépendance de façon qu'il y ait sur la courbe $[\alpha, \beta]$ des points-limites. Les coordonnées x, y, z d'un point-limite doivent satisfaire, en effet, aux équations

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

et, en éliminant $\frac{\partial \beta}{d\alpha}$ entre ces deux équations, on a, pour déterminer les points-limites les trois équations

$$(6) \qquad F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

Nous supposerons que ces trois équations soient compatibles et déterminent les coordonnées d'un ou de plusieurs points en fonction continue de α, β. Ces points s'appellent *les points focaux*. Généralement, et nous supposerons que ce soit le cas, le lieu de ces points est

[1] Parce que les points de cette arête sont généralement des points de rebroussement pour les sections de l'enveloppe par un plan.

une surface que l'on appelle l'*enveloppe* ou la *surface focale* de la congruence.

Le système de valeurs x, y, z fonctions continues de α, β qu'on obtient en résolvant les équations (6), fournit déjà une représentation paramétrique de la surface focale. L'équation en x, y, z de cette surface s'obtiendra en éliminant α et β entre les trois équations (6).

Théorème. — *Chaque courbe de la congruence touche la surface focale en chacun de ses points focaux.*

En effet, les composantes dx, dy, dz d'un déplacement tangentiel à la surface focale qui correspondent à un système d'accroissements quelconque $d\alpha, d\beta$ des paramètres, sont liés par les relations

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial \beta}\,d\beta = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{dx}\,dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,d\beta = 0. \end{cases}$$

Si l'on considère, en particulier, le système d'accroissements $d\alpha, d\beta$ qui vérifie *simultanément* les deux équations

$$(8)\qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta}\,d\beta = 0, \qquad\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,d\beta = 0,$$

compatibles sur la surface focale en vertu de la troisième équation (6), on voit que le déplacement dx, dy, dz se fait aussi sur la tangente à la courbe $[\alpha, \beta]$. Donc cette courbe touche la surface focale.

Réciproquement, si l'on cherche une surface (E) *qui touche en chacun de ses points une des courbes de la congruence, on retrouve la surface focale.*

En effet, on peut considérer les coordonnées x, y, z des points de la surface (E) comme des fonctions de α, β assujetties à vérifier les équations $F = 0$, $\Phi = 0$. Différentions totalement ces équations pour un déplacement sur la tangente à la courbe $[\alpha, \beta]$, nous trouverons les équations (7) se réduisant aux équations (8). Enfin, en éliminant le rapport $d\beta : d\alpha$ entre ces dernières, on retrouve la troisième des équations (6) qui détermine la surface focale.

Exercices.

1. Montrer que l'enveloppe du plan qui coupe les axes rectangulaires aux distances respectives $\alpha^2 : (a + \alpha)$, $\beta^2 : (b + \beta)$, $\gamma^2 : (c + \gamma)$ a pour équation $(x + y + z)^2 + 4\,(ax + by + cz) = 0$.

2. L'enveloppe des plans tangents aux différents points d'une section plane d'un ellipsoïde est une surface conique. Discuter.

3. Une *surface canal* est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe. La caractéristique est alors le grand cercle qui se trouve dans le plan normal à la courbe. Étudier le cas où le rayon varie en même temps que le centre se déplace.

4. L'enveloppe du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$, dont les paramètres sont liés par la relation

$$\frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{l^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2}{l^2 - \gamma^2} = 0,$$

est la *surface des ondes*

$$\frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0, \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

§ 6. Systèmes de droites : Surfaces réglées ; Congruences.

356. Surfaces réglées développables ou gauches. — On appelle *réglée* une surface qui est le lieu des positions successives d'une droite mobile nommée *génératrice*. Il y en a de deux espèces, les *surfaces développables* et les *surfaces gauches*. Nous commençons par l'étude des développables. Ce nom leur vient de la propriété d'être *applicables* sur un plan, que nous examinerons plus loin au n° 359.

357. Surfaces développables. — *On appelle développable toute surface qui est l'enveloppe d'un plan mobile à un paramètre.* Soit le plan mobile

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

où A, B, C, D dépendent d'un paramètre α. Si le plan se déplaçait parallèlement à lui-même ou en tournant autour d'une droite fixe, il n'y aurait pas de surface enveloppe. Nous excluons donc ces deux cas. La *caractéristique* de ce plan (n° 351) s'obtient alors en joignant à la précédente l'équation dérivée par rapport à α,

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et ces caractéristiques sont les *génératrices* rectilignes de la surface.

Théorème. — *Toute droite Δ située sur la développable est une des caractéristiques précédentes.*

En effet, on peut toujours admettre que cette droite Δ ait été prise pour axe des z. Alors ses équations sont $x = 0$, $y = 0$. Tout point $(0, 0, z)$ de Δ étant situé sur une caractéristique, on doit pouvoir satisfaire, quel que soit z, aux deux équations

$$Cz + D = 0, \qquad C'z + D' = 0,$$

qui s'obtiennent en posant $x = y = 0$ dans celles des caractéristiques et qui expriment une relation entre z et α. Si Δ est une caractéristique, ces équations seront vérifiées pour une valeur constante α_0 de α, et cette valeur annulera nécessairemant C, D, C' et D', puisque z reste arbitraire tandis que ces coefficients demeurent constants.

Je dis que c'est la seule hypothèse possible, car, si α variait avec z, on aurait, en éliminant z, la condition $CD' - C'D = 0$, qui exprime que $D : C$ est constant, à moins que C ne soit constamment nul. Or, d'une part, $D : C$ (qui est égal à $-z$) ne peut être constant puisque z est variable ; d'autre part, C ne peut être constamment nul, car alors D (qui est égal à $-Cz$) le serait aussi et le plan mobile deviendrait $Ax + By = 0$, il tournerait donc simplement autour de Oz et n'envelopperait plus une surface. Donc Δ est une caractéristique.

Il résulte de là qu'*une développable ne peut admettre qu'un seul système de génératrices rectilignes*.

Arête de rebroussement. — En général, les caractéristiques restent tangentes à une même courbe appelée *arête de rebroussement* de la développable (n° 354) et qui se définit en joignant aux deux équations de la caractéristique la suivante

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

obtenue par une nouvelle dérivation, ce qui fait un système de trois équations linéaires d'où l'on peut tirer x, y, z en fonction de α.

Mais il y a deux cas d'exception à signaler : Si l'arête se réduit à un point, la développable est un *cône*, et c'est un *cylindre* si ce point est rejeté à l'infini.

Théorème. — *Réciproquement, le lieu des tangentes à une courbe gauche est une surface développable, à savoir l'enveloppe du plan osculateur de cette courbe.*

En effet, le plan osculateur varie le long de la courbe et ne dépend que d'un seul paramètre, celui du point de contact. Les caractéristiques (intersections de deux plans osculateurs infiniment voisins)

sont les tangentes à la courbe (*t.* I, n° 273), donc le lieu des caractéristiques n'est autre que celui des tangentes.

On voit donc que les développables sont des surfaces réglées dont les génératrices ont une courbe enveloppe, ou bien passent par un point fixe (cône) ou bien ont une direction fixe (cylindre).

L'enveloppe ou la courbe à laquelle les génératrices restent tangentes, est l'*arête de rebroussement* de la surface. Si cette courbe était plane, la surface dégénérerait dans un plan.

Théorème. — *Le plan tangent à une développable est le même tout le long d'une génératrice.*

En effet, la développable est l'enveloppe d'un plan mobile ; ce plan touche donc l'enveloppe tout le long de la caractéristique, et cette caractéristique est la génératrice. Le plan enveloppé est donc le plan tangent à la développable tout le long de la génératrice commune.

Théorème. — *La condition nécessaire est suffisante pour que la droite mobile*

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{1}$$

dont les coefficients dépendent d'un paramètre α, *engendre une surface développable (ou un plan), est que l'on ait*

$$a'q' - b'p' = 0. \tag{2}$$

En effet, pour que la droite (1) engendre une surface développable, il faut qu'elle soit la caractéristique d'un plan mobile, donc que ses équations puissent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0; \end{cases}$$

d'où, en éliminant x et y par (1), les quatre conditions :

$$\begin{cases} Aa + Bb + C = 0, \\ Ap + Bq + D = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A'a + B'p + C' = 0, \\ Ap' + B'q + D' = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs on peut remplacer les deux dernières par les deux suivantes, obtenues en dérivant les deux premières :

$$\begin{cases} Aa' + Bb' = 0, \\ Ap' + Bq' = 0. \end{cases}$$

Pour que ces équations soient compatibles et permettent de déterminer A, B et ensuite C, D, il faut et il suffit que $a'q' - b'p' = 0$.

Si cette condition a lieu, la droite (1) engendre une surface développable, à moins que $Ax + By + Cz + D = 0$ ne se réduise à un plan fixe, auquel cas la droite se meut dans ce plan.

358. Equation aux dérivées partielles des surfaces développables. — Les surfaces développables satisfont à une équation aux dérivées partielles qui les caractérise. Considérons l'ordonnée z comme une fonction de x, y sur la surface ; et posons, en abrégé,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice ; les coefficients de son équation, qui est

$$\zeta - z - p\,(\xi - x) - q\,(\eta - y) = 0,$$

en particulier p et q, ne dépendent que du seul paramètre qui définit la position de la génératrice de contact. Donc p et q sont aussi fonctions l'un de l'autre et l'on a, par le théorème général sur les déterminants fonctionnels (n° 226),

$$\frac{d\,(p, q)}{d\,(x, y)} = rt - s^2 = 0.$$

Donc l'ordonnée z d'une développable satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre $rt - s^2 = 0$.

Réciproquement, $rt - s^2 = 0$ est l'équation aux dérivées partielles d'une développable. En effet, elle exprime d'abord que p et q sont fonctions l'un de l'autre. Mais on a aussi

$$\frac{d\,(p,\, z - px - qy)}{d\,(x, y)} = - \begin{vmatrix} r, & xr + ys \\ s, & xs + yt \end{vmatrix} = \quad y\,(s^2 - rt) = 0.$$

Donc le troisième coefficient $(z - px - qy)$ de l'équation du plan tangent est aussi fonction du premier p. La surface, qui est l'enveloppe de ses plans tangents, est donc l'enveloppe d'une famille de plans à un paramètre : c'est une surface développable.

359. Surfaces applicables sur un plan. — On dit que deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre, lorsque l'on peut établir entre leurs points une correspondance telle que les arcs correspondants aient même longueur sur les deux surfaces. Nous allons montrer que les surfaces développables peuvent être caractérisées par la propriété d'être applicables sur un plan.

1°) *Une surface développable est applicable sur un plan.*

Soient x, y, z les coordonnées d'un point O de l'arête de rebroussement de la surface, exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe. Les cosinus directeurs de la tangente au point O seront x', y', z', en

désignant par des accents les dérivées par rapport à s. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point M de cette tangente située à la distance (positive ou négative) u du point O, seront

$$\xi = x + ux', \qquad \eta = y + uy', \qquad \zeta = z + uz'.$$

Telles sont donc les coordonnées d'un point quelconque M de la développable exprimées en fonction des deux variables indépendantes u et s.

Cherchons l'expression de la différentielle $d\sigma$ de l'arc d'une courbe tracée sur la développable. On a

$$d\sigma^2 = \Sigma\, d\xi^2 = \Sigma\, [(x' + ux'')\, ds + x'\, du]^2.$$

Soient R le rayon de courbure et λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale principale de l'arête au point O. On a $x'' = \lambda : \mathrm{R}, \ldots\ldots$ $\Sigma x'^2 = 1$ et $\Sigma x'\lambda = 0$; il vient donc

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{u^2}{\mathrm{R}^2}\right) ds^2 + 2\, du\, ds + du^2 = (du + ds)^2 + \left(\frac{u\, ds}{\mathrm{R}}\right)^2.$$

Cette expression ne dépend que de la relation $u = \varphi(s)$ qui définit la courbe tracée sur la surface et du rayon de courbure R de l'arête ; nullement de la torsion de celle-ci.

Or R est une fonction déterminée $f(s)$ de l'arc ; et la relation $\mathrm{R} = f(s)$ est aussi l'*équation intrinsèque* (n° 204) d'une courbe plane que nous pouvons construire. Les points O′ de cette courbe plane correspondront aux points O de l'arête et les rayons de courbure correspondants seront les mêmes. Concevons maintenant que l'on porte, sur la tangente en O′ à cette courbe plane, une longueur O′M′ égale à OM, donc égale à u ; nous déterminerons ainsi dans le plan de la courbe (O′) un point M′ que nous ferons correspondre au point M de la développable. Ce mode de correspondance conserve la longueur des arcs, car les différentielles $d\sigma$ des arcs de deux courbes correspondantes de la développable et du plan, définies toutes deux par la même relation $u = \varphi(s)$, auront même expression pour ces deux courbes.

La démonstration précédente tombe en défaut pour le *cône* et le *cylindre*, mais le théorème subsiste comme le lecteur peut le vérifier facilement lui-même.

2° *Réciproquement, une surface applicable sur un plan est développable.*

Soient α, β les coordonnées des points du plan sur lequel on applique la surface. Nous pouvons considérer les coordonnées x, y, z

des points de la surface comme des fonctions de celles α, β des points correspondants du plan. Les longueurs étant conservées, aux droites qui sont les lignes les plus courtes du plan, doivent correspondre les lignes géodésiques de la surface. Faisons varier α, β sur une droite (D) de direction arbitraire, nous pourrons prendre $d\alpha$ et $d\beta$ tous deux constants; alors $ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, qui aussi la différentielle de l'arc de la géodésique (g) correspondante, est constant également. Les cosinus directeurs de la normale principale de (g) sont (ds étant constant) proportionnels à d^2x, d^2y et d^2z. Mais, d'autre part, puisque c'est une géodésique, ils sont aussi proportionnels aux coefficients directeurs p, q et -1 de la normale à la surface (n° 301). On a donc, pour $d\alpha$ et $d\beta$ constants, les *identités* en α, β, $d\alpha$ et $d\beta$:

$$d^2x + p\,d^2z = 0, \qquad d^2y + q\,d^2z = 0.$$

Remplaçons dans ces deux équations d^2x, d^2y et d^2z par leurs expressions développées en $d\alpha^2$, $d\alpha\,d\beta$ et $d\beta^2$; les coefficients de $d\alpha^2$, $d\alpha\,d\beta$ et $d\beta^2$ seront nuls séparément. On aura, en particulier, par la première équation,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} + p\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + p\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0;$$

et, en multipliant respectivement par $d\alpha$, $d\beta$ et ajoutant,

$$d\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) + pd\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right) = 0; \quad \text{de même,} \quad d\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) + qd\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Il résulte de ces deux identités en α, β que $p\,d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)$ et $q\,d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)$ sont des différentielles exactes, ce qui n'a lieu que si p et q sont des fonctions de $\frac{\partial z}{\partial\alpha}$, donc d'un même paramètre ([1]). Ainsi p et q sont fonctions l'un de l'autre et la surface est développable, comme on l'a montré au n° précédent.

360. Surfaces réglées en général et propriétés des surfaces gauches en particulier. — Toute surface réglée peut être considérée comme engendrée par une *génératrice* G qui s'appuie constamment sur une courbe *directrice* Γ.

Soient x, y, z les cordonnées d'un point de la directrice Γ exprimées en fonction d'une variable indépendante t; a, b, c les cosinus

([1]) En effet, si $pd\mathrm{F}$ est une différentielle exacte, p et $\mu = 1$ sont deux facteurs intégrant de $d\mathrm{F} = 0$, donc (n° 133) $p = \mu\,\varphi(\mathrm{F}) = \varphi(\mathrm{F})$.

directeurs (fonctions de t) de la génératice G qui passe par ce point t ; u la distance (positive ou négative) d'un point M de G au point x, y, z. Les cordonnées ξ, η, ζ du point M de la génératrice G seront données par les formules

$$\text{(G)} \qquad \xi = x + au, \qquad \eta = y + bu, \qquad \zeta = z + cu.$$

Celles ξ_1, η_1, ζ_1 de la génératrice infiniment voisine menée par le point $(t + \Delta t)$ de la directrice, seront, de même,

$$(\text{G}_1) \quad \xi_1 = x_1 + a_1 u_1, \qquad \eta_1 = y_1 + b_1 u_1, \qquad \zeta_1 = z_1 + c_1 u_1,$$

où l'on a

$$x_1 = x + \Delta x, \qquad a_1 = a + \Delta a, \qquad y_1 = y + \Delta y, \ldots$$

Cherchons la plus courte distance de la génératrice G à la génératrice infiniment voisine G_1. Le carré de la distance δ de deux points M (ξ, η, ζ) et M_1 $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ de ces deux génératrices a pour expression

$$(4) \qquad \delta^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 = \Sigma\,(\xi_1 - \xi)^2.$$

Pour obtenir son minimum, il faut annuler ses dérivées par rapport aux deux variables u et u_1, ce qui donne, en ayant égard aux valeurs de ξ, ξ_1,...

$$\Sigma\,(\xi_1 - \xi)\,a = 0, \qquad \Sigma\,(\xi_1 - \xi)a_1 = 0.$$

Mais comme $a_1 = a + \Delta a, \ldots$ ce système peut être remplacé par le suivant :

$$(5) \qquad \Sigma\,(\xi_1 - \xi)\,a = 0, \qquad \Sigma\,(\xi_1 - \xi)\,\Delta\alpha = 0.$$

Faisons dans la dernière équation les substitutions

$$\xi_1 - \xi = \Delta x + a_1 u_1 - au = \Delta x + a\,(u_1 - u) + u_1\,\Delta a, \ldots ;$$

il viendra

$$\Sigma\,\Delta a\,\Delta x + u_1 \Sigma\,\Delta a^2 + (u_1 - u)\,\Sigma a \Delta a = 0.$$

Divisons par Δt^2 et passons à la limite; en désignant par des accents les dérivées par rapport à t et en remplaçant u_1 par sa limite u, il viendra simplement

$$\Sigma a' x' + u\,\Sigma a'^2 = 0,$$

car le rapport $\Sigma a \Delta a : \Delta t^2$ reste fini ($\Sigma a a'$ étant nul car $\Sigma a^2 = 1$). De là, la valeur de u :

$$(6) \qquad u = -\frac{\Sigma\,a' x'}{\Sigma a'^2}.$$

Cette valeur (positive ou négative) de u détermine sur la génératrice G un point O qui est le pied de la perpendiculaire menée à la génératrice infiniment voisine et qu'on appelle le *point central*. Le lieu

de ce point quand la génératrice varie, est une courbe tracée sur la surface qu'on appelle la *ligne de striction* de la surface. Dans le cas particulier où la surface est développable, le point central devient un *point-limite* et la ligne de striction devient l'*arête de rebroussement* de la développable.

L'équation (6) montre quelle est la *condition pour que la directrice* Γ *soit la ligne de striction ou l'arête de rebroussement; il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Sigma\, a'x' = a'x' + b'y + c'z' = 0.$$

Déterminons maintenant les cosinus directeurs λ, μ, ν de la plus courte distance δ. A cet effet, remplaçons dans les équations (5) $\xi_1 - \xi, \ldots$ par les quantités proportionnelles $\lambda \ldots$; elles deviennent $\Sigma\,\lambda a = 0$, $\Sigma \lambda \Delta a = 0$. On en tire, par les propriétés des fractions égales, en désignant par φ l'angle des deux génératrices infiniment voisines G et G_1,

$$(7) \qquad \frac{\lambda}{b\,\Delta c - c\,\Delta b} = \frac{\mu}{c\,\Delta a - a\,\Delta c} = \frac{\nu}{a\,\Delta b - b\,\Delta a} = \pm \frac{1}{\sin\varphi},$$

car on sait, par la géométrie analytique, que

$$\Sigma\,\lambda^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\,(b\,\Delta c - c\,\Delta b)^2 = \sin^2\varphi.$$

Enfin la plus courte distance δ elle-même est fournie par la relation

$$\delta = \Sigma\,\lambda(\xi_1 - \xi) = \Sigma\,\lambda\,(\Delta x + a_1 u_1 - au) = \Sigma\,\lambda\,\Delta x\,;$$

ou, en remplaçant λ, μ, ν par leurs valeurs (7),

$$\delta = \pm\frac{1}{\sin\varphi}\,\Sigma\,\Delta x\,(b\,\Delta c - c\,\Delta b) = \pm\frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} a & \Delta a & \Delta x \\ b & \Delta b & \Delta y \\ c & \Delta c & \Delta z \end{vmatrix}$$

On peut donner à φ le signe qu'on veut et, par conséquent, déterminer ce signe en prenant toujours le signe + dans l'équation précédente. Nous écrirons ainsi, en abrégé, $\delta \sin\varphi = [a,\ \Delta a,\ \Delta x]$; et, en développant jusqu'aux termes du troisième ordre, on aura

$$\delta \sin\varphi = [a,\ da,\ dx] + \frac{1}{2}[a,\ d^2a,\ dx] + \frac{1}{2}[a,\ da,\ d^2x] + \ldots$$
$$= [a,\ da,\ dx] + \frac{1}{2}\,d[a, da, dx] + \ldots$$

Le facteur $\sin\varphi$ qui a pour valeur principale $\sqrt{\Sigma\,(bdc - cdb)^2}$ ou $\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$ est du premier ordre. *La condition pour que la*

surface soit développable (ou pour que δ soit d'ordre supérieur au premier) *est donc*

$$[a, da, dx] = 0.$$

Mais alors la différentielle de ce déterminant s'annule aussi, de sorte que δ est du troisième ordre. Donc, *dans une surface développable, la distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre.*

Supposons maintenant la surface gauche. Divisons l'avant-dernière équation par $\sin^2\varphi$ et passons à la limite ; il vient

$$(8) \qquad \lim \frac{\delta}{\sin^2\varphi} = \frac{[a, da, dx]}{da^2 + db^2 + dc^2} = \frac{[a, a', x']}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = k,$$

k désignant une quantité de signe déterminé, variable d'une génératrice à l'autre, nommée *paramètre de distribution.*

Ce paramètre joue, dans la théorie du plan tangent aux surfaces gauches, un rôle important que nous allons mettre en lumière. Pour plus de simplicité, prenons la génératrice G pour axe des z. Les équations de G et G_1 seront

$$(G) \begin{cases} \xi = 0, \\ \eta = 0, \\ \zeta = u, \end{cases} \qquad (G_1) \begin{cases} \xi_1 = \Delta x + u_1 \Delta a, \\ \eta_1 = \Delta y + u_1 \Delta b, \\ \zeta_1 = \Delta z + u_1 (1 + \Delta c). \end{cases}$$

D'ailleurs Δc est du second ordre, car le paramètre t de (G) rendant c égal à 1 (donc maximum) annule c'.

Pour simplifier davantage encore, plaçons l'origine au point central de Oz et menons le plan zx tangent à la ligne de striction. On aura, de plus, pour la valeur particulière t du paramètre de G, les deux conditions $a'x' + b'y' + c'z' = 0$ et $y' = 0$, qui se réduisent (c' étant nul et x' ne l'étant pas) à $a' = 0$ et $y' = 0$.

En définitive, les équations de la génératrice (G_1) deviennent, en éliminant u_1 et ne gardant que les termes du premier ordre,

$$(G_1) \qquad \xi_1 = dx, \qquad \eta_1 = \zeta_1\, db.$$

Arrivons maintenant au plan tangent en un point de G. Il sera déterminé par la génératrice G elle-même et une autre tangente. Par exemple, le plan tangent au point central (ou le *plan central*) sera le plan xz qui contient G et la tangente à la ligne de striction.

Soit M un autre point de G à la distance u du point central. On peut y déterminer le plan tangent par l'angle ψ qu'il fait avec le plan central, et c'est le même angle que celui que fait avec Ox la tangente

MT perpendiculaire à Oz (fig. 9). Cette tangente s'appuyant au point T (ξ_1, η_1, $\zeta_1 = u$) de la génératrice G_1, on tire immédiatement des équations approchées de G_1 (le sens positif pour ψ étant de Ox vers Oy)

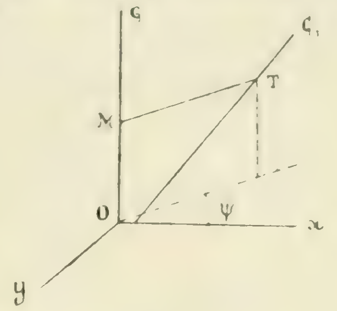


Fig 9.

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{udb}{dx} = u\frac{b'}{x'} = \frac{u}{k}$$

car la valeur (8) du paramètre de distribution se réduit à $b' : x'$ par les hypothèses $a = b = a' = c' = 0$ et $c = 1$. De là, le théorème de Chasles : *La tangente de l'inclinaison du plan tangent sur le plan central varie, sur chaque génératrice, proportionnellement à la distance du point de contact au point central.*

361. Interprétation du signe du paramètre de distribution. — Ce signe déterminé par la formule (8), correspond à une propriété de la surface. En effet, gardons les axes considérés en dernier lieu ; on a $\operatorname{tg} \psi = u : k$. Donc, si le point M s'éloigne sur l'axe des z positifs, $\operatorname{tg} \psi$ croît avec u en valeur absolue et a le signe de k. Si le paramètre k est positif, ψ augmente et un observateur situé sur Oz qui voit venir à lui le point M, voit donc tourner le plan tangent (et avec lui la normale à la surface) dans le sens de Ox vers Oy c'est-à-dire dans le *sens positif*. Si l'on renverse la position de l'observateur et le sens du mouvement, les appparences resteront les mêmes. Si k était négatif, les apparences seraient inverses. D'où la règle suivante.

Un observateur placé sur une génératrice OM *et qui voit venir le point* M, *verra tourner la normale en ce point dans le sens positif ou dans le sens négatif selon que k est positif ou négatif.*

Le sens positif, qui est celui de la rotation de Ox vers Oy pour un observateur situé sur Oz, est ordinairement celui de la rotation des aiguilles d'une montre

362. Congruences de droites. — Considérons une congruence de droites

(9) $$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les coefficients dépendant de deux paramètres α, β et rappelons-nous les résultats généraux du n° 355.

Toutes les droites D de la congruence sont tangentes à une même

surface S que l'on appelle la *surface focale*. Les points où la droite D touche S sont ses *points focaux*. Pour trouver ces points, on considère la droite D comme faisant partie d'une famille à un paramètre, au moyen d'une relation $\beta = \varphi(\alpha)$ compatible avec les paramètres de D et telle qu'il y ait des *points-limites* sur D. Ces points-limites sont les points focaux.

Pour les obtenir, il faut combiner les équations (**9**) avec leurs dérivées totales par rapport à α :

(**10**) $$0 = a'z + p', \qquad 0 = b'z + q',$$

et choisir $\varphi(\alpha)$ de manière que ces équations soient compatibles, c'est-à-dire par la condition

(**11**) $$a'q' - b'p' = 0,$$

ou l'on a

$$a' = \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \beta}\beta'. \qquad q' = \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\beta', \ldots$$

Substituant ces valeurs, la condition (**11**) prend la forme

(**12**) $$\mathrm{P}\,\beta'^2 + \mathrm{Q}\,\beta' + \mathrm{R} = 0$$

où P, Q, R sont des fonctions connues de α, β. Cette équation du second degré a, en général, deux racines

(**13**) $$\beta' = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad \beta' = \varphi_2(\alpha, \beta).$$

Portant ces valeurs de β' dans les équations (**10**), on obtient deux valeurs correspondantes pour z. Il y a donc, sur chaque génératrice de la congruence, deux points focaux F_1 et F_2 et la surface focale S se compose de deux nappes S_1 et S_2 dont chacune est touchée en un point par chaque génératrice de la congruence.

Les calculs que nous venons de faire résolvent la question de faire passer par une droite D de la congruence une surface développable dont les génératrices appartiennent à la congruence. Il faut, en effet, pour cela, poser une relation $\beta = \varphi(\alpha)$, vérifiée par les coordonnées de D et telle qu'on ait la relation (**11**), donc aussi les relations (**12**) et (**13**). Les équations différentielles (**13**) déterminent complètement deux relations $\beta = \varphi(\alpha)$ satisfaisant aux conditions du problème. De là, la conclusion suivante :

Il existe deux surfaces développables Δ_1 et Δ_2 passant par une génératrice arbitraire et formées de droites de la congruence.

Les points focaux F_1 et F_2 de la génératrice D sont ceux où cette génératrice touche respectivement les arêtes de rebroussement A_1 et

A_2 des deux développables Δ_1 et Δ_2. Ces arêtes sont donc situées respectivement sur les nappes S_1 et S_2 de la surface focale, qui est leur lieu géométrique.

Considérons, en particulier, la développable Δ_1 engendrée par une suite de génératices D, D', D'',... (fig. 10). Les points focaux successifs F_1, F_1', F_1'',... dessinent sur S_1 l'arête de rebroussement A_1 ; les points focaux F_2, F_2', F_2'',... dessinent sur S_2 une autre courbe de Δ_1, qui n'est pas tangente à la droite D. Donc D et la tangente à cette courbe déterminent le plan tangent à la développable au point F_2 (donc le long de D) et aussi le plan tangent à S_2 au même point F_2. Donc ces deux plans tangents coïncident, et l'on a le théorème suivant :

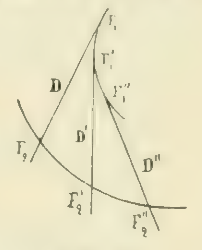


Fig. 10

Les plans tangents à la surface focale aux points focaux, ou les plans focaux, sont les plans tangents aux deux développables qui passent par chaque génératrice.

De là cette autre conclusion :

Chacune des deux développables qui passent par une génératrice D *de la congruence a son arête de rebroussement sur une des nappes de la surface focale et est circonscrite à l'autre nappe.*

Remarque. — Ces conclusions générales supposent que les points focaux F_1 et F_2 ne soient pas confondus et que chacun d'eux décrive une surface, ce qui est évidemment le cas normal. Mais, il peut y avoir des exceptions. Si l'un des points focaux, par exemple, était fixe ou se mouvait sur une courbe, une des deux nappes de la surface dégénérerait dans un point ou dans une courbe, et les conclusions précédentes tomberaient partiellement en défaut. Nous en verrons un exemple remarquable fourni par la congruence des normales à une courbe gauche (nº 367).

363. Congruences de normales à une surface. — Demandons-nous si les droites d'une congruence arbitraire

$$(14) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

restent normales à une même surface, les coefficients a, p, b, q étant donc fonctions de deux paramètres α et β.

S'il en est ainsi, les coordonnées x, y, z des points de la surface seront des fonctions de α et de β assujetties à vérifier les équations précédentes. Mais, de plus, tout déplacement dx, dy, dz sur la surface

devant être normal à la droite (14), on aura la condition (x, y, z étant fonctions de α, β)

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0;$$

ou, en remplaçant dx et dy par leurs valeurs tirées de (14),

$$(a^2 + b^2 + 1)dz + z\,(a\,da + b\,db) + a\,dp + b\,dq = 0,$$

ce qui, après division par $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$, peut s'écrire plus simplement

$$d\left(z\sqrt{1 + a^2 + b^2}\right) + \frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0.$$

C'est une équation aux différentielles totales entre z, α et β qui doit servir à déterminer z. Mais, pour que cette détermination soit possible, il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

soit une différentielle totale exacte. Cette condition entraîne une relation entre les quatre fonctions a, b, p et q de α, β. Donc *il n'existe pas, en général, de surface normale aux droites d'une congruence donnée.*

La condition que nous venons de trouver est susceptible d'une interprétation géométrique très remarquable Prenons comme variables indépendantes les coordonnées p *et* q du pied de le droite D sur le plan xy ([1]). La condition d'intégrabilité deviendra

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right).$$

D'autre part, l'équation (11) deviendra

$$\frac{\partial a}{\partial q}\,q'^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial q}\right) q' - \frac{\partial b}{\partial p} = 0$$

et les deux racines q'_1 et q'_2 de cette équation seront les coefficients angulaires dans le plan xy des courbes d'intersection par ce plan des deux développables passant par D. Les deux plans tangents à ces développables le long de D, devant contenir D et l'une de ces tangentes respectivement, auront pour équations

$$q'_1\,(x - az - p) = (y - bz - q), \qquad q'_2\,(x - az - p) = (y - bz - q).$$

La condition de perpendicularité de ces deux plans est

$$1 + b^2 - ab\,(q'_1 + q'_2) + q'_1\,q'_2\,(1 + a^2) = 0$$

([1]) Ceci est permis. En effet, si p et q étaient liés par une relation, le plan xy couperait la congruence suivant une courbe et. pour éviter ce cas, on changerait d'axes coordonnés. Il est d'ailleurs impossible que la congruence soit coupée suivant une courbe par un plan quelconque, sinon elle se réduirait à une surface réglée ou à un plan.

et (en remplaçant les racines par leurs valeurs)

$$\frac{\partial a}{\partial q}(1+b^2)+ab\left(\frac{\partial a}{\partial p}-\frac{\partial b}{\partial q}\right)+\frac{\partial b}{\partial p}(1+a^2)=0.$$

Or cette condition coïncide avec celle (15) d'intégrabilité. La condition d'intégrabilité est donc que les deux développables passant par une même génératrice se coupent normalement. On a donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites soit une congruence de normales, est que les deux plans focaux d'une génératrice quelconque soient rectangulaires.

§ 7. Application aux courbes gauches. Surface polaire. Développées.

364. Surface polaire. — Etant donnée une courbe gauche

$$x=f(t),\qquad y=f_1(t),\qquad z=f_2(t),$$

la *surface polaire* est l'enveloppe des plans normaux. C'est donc une surface développable. Pour obtenir les équations d'une caractéristique, il faut combiner l'équation du plan normal et sa dérivée par rapport à t. Cette droite, dont les équations sont donc

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0,$$
$$(X-x)x''+(Y-y)y''+(Z-z)z''=x'^2+y'^2+z'^2,$$

s'appelle *droite polaire* ou *axe du plan osculateur* ou encore *axe de courbure*. Elle est perpendiculaire au plan osculateur, car ses coefficients de direction $y'z''-z'y''=A,\ldots$ sont les mêmes que ceux de la normale à ce plan. En joignant aux équations de l'axe de courbure celle du plan osculateur, $A(X-x)+\ldots=0$, on obtient les trois équations qui déterminent les coordonnées X, Y, Z du centre de courbure (*t.* I, n° 74). Donc : *Le centre de courbure est à l'intersection du plan osculateur par l'axe de courbure.*

Les équations de l'arête de rebroussement de la surface polaire s'obtiennent en ajoutant aux deux équations d'une caractéristique la suivante, obtenue en dérivant une fois de plus,

$$(X-x)x'''+(Y-y)y'''+(Z-z)z'''=3(x'x''+y'y''+z'z'').$$

365. Sphère osculatrice. — L'équation d'une sphère (de centre X, Y, Z et de rayon R arbitraires) renferme quatre paramètres qui permettent d'obtenir avec la courbe, en un point donné t, un contact du troisième ordre. Les éléments X, Y, Z et R de la sphère osculatrice seront déterminés par les quatre équations :

$$\psi(t) = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\psi'(t) = (x - X)\,x' + (y - Y)\,y' + (z - Z)\,z' = 0.$$

$$\psi''(t) = \psi'''(t) = 0.$$

Les trois équations $\psi' = \psi'' = \psi''' = 0$ qui déterminent X, Y, Z sont les mêmes que celles qui déterminent les coordonnées du point où la droite polaire touche son arête de rebroussement et que nous avons écrites au nº précédent. Nous obtenons donc le théorème suivant :

L'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu géométrique du centre de la sphère osculatrice.

366. Développées des courbes gauches. — On appelle *développée* d'une courbe donnée toute courbe qui est une enveloppe de normales, ou toute courbe dont les tangentes viennent rencontrer normalement la courbe donnée.

Soient x, y, z les coordonnées du point M de la courbe gauche qu'on obtient pour la valeur t du paramètre ; ξ, η, ζ celles du point N correspondant de la développée ; σ l'arc de la développée compté positivement dans le sens MN ; ρ la distance MN. Les équations du problème sont

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\sigma}{\rho}$$

$$(2) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

Il y a donc trois relations distinctes pour déterminer ξ, η, ζ en fonction de t. Commençons par établir quelques propriétés de la développée. Différentions l'équation

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2$$

en ayant égard à (2) ; il vient

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = \rho\,d\rho$$

et, en remplaçant $d\xi$,... par leurs valeurs (1),

$$[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]\,\frac{d\sigma}{\rho} = \rho\,d\rho, \qquad \text{d'où} \qquad d\sigma = d\rho.$$

Donc *la longueur d'un arc de la développée est égale à la différence de longueur des normales à la courbe tangentes à ses extrémités.*

Différentions l'équation (2) en tenant compte de la relation $\Sigma\,d\xi\,dx = 0$ qui résulte immédiatement de (1) et (2) ; il vient

$$(3) \qquad (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2.$$

Mais les équations (2) et (3) sont celles de l'axe de courbure du point M. Le point N où la normale MN touche la développée est sur cet axe ; donc *toutes les développées d'une courbe sont tracées sur sa surface polaire.*

Passons maintenant à la détermination analytique des développées.

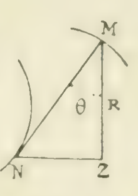


Fig. 11.

Soit Z le centre de courbure au point M ; menons le rayon de courbure R = MZ et l'axe de courbure ZN (fig. 11). Le segment ZN sera considéré comme positif dans le sens de la binormale de direction (X, Y, Z) et comme négatif en sens contraire.

Désignons enfin par $\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ l'angle que fait la normale MN avec la normale principale MZ, angle considéré comme positif ou négatif en même temps que ZN. On aura, en grandeur et en signe, $ZN = R \operatorname{tg} \theta$.

Pour obtenir les coordonnées du point N, écrivons que les projections de MN sur les axes sont égales à celles du contour MZN ; nous trouvons

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi - x &= R(\lambda + X \operatorname{tg} \theta), \\ \eta - y &= R(\mu + Y \operatorname{tg} \theta), \\ \zeta - z &= R(\nu + Z \operatorname{tg} \theta). \end{aligned} \right.$$

Il suffit, pour obtenir les équations d'une développée, de connaître la valeur de θ en fonction de t. A cet effet, désignons, en abrégé, par τ la valeur commune des rapports (1) ; la relation $d\xi = \tau(\xi - x)$ devient, en y remplaçant $d\xi$ et $\xi - x$ par leurs valeurs tirées de (4),

$$dx + dR(\lambda + X \operatorname{tg} \theta) + R\left(d\lambda + dX \operatorname{tg} \theta + \frac{X\, d\theta}{\cos^2 \theta}\right) = \tau R(\lambda + X \operatorname{tg} \theta).$$

Divisons par ds et substituons les valeurs tirées des formules de Frenet (*t.* I, n° 284) :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{X}{T}, \qquad \frac{dX}{ds} = \frac{\lambda}{T};$$

il vient, en réduisant,

$$\lambda\left(\frac{dR - \tau R}{ds} + \frac{R \operatorname{tg} \theta}{T}\right) + X\left(\frac{dR - \tau R}{ds} \operatorname{tg} \theta - \frac{R}{T} + \frac{R\, d\theta}{\cos^2 \theta\, ds}\right) = 0.$$

Cette équation en donne deux autres analogues par les permutations circulaires (λ, μ, ν), (X, Y, Z). En multipliant respectivement les trois équations par λ, μ, ν et ajoutant, puis par X, Y, Z et ajoutant, on voit que les trois équations se réduisent à deux distinctes :

$$\frac{dR - \tau R}{ds} + \frac{R \operatorname{tg} \theta}{T} = 0, \qquad \frac{dR - \tau R}{ds} \operatorname{tg} \theta - \frac{R}{T} + \frac{R\, d\theta}{\cos^2 \theta\, ds} = 0,$$

qui déterminent τ et θ. Eliminant $\frac{dR - \tau R}{ds}$, on obtient, pour déterminer θ, l'équation

$$-\frac{R}{T}(\operatorname{tg}^2 \theta + 1) + \frac{R\, d\theta}{\cos^2\theta\, ds} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T}.$$

En définitive, θ est déterminé par une quadrature

$$(5) \qquad \theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{T},$$

t étant la variable d'intégration. La valeur initiale θ_0 reste arbitraire. Si l'on porte la valeur (5) dans (4), on obtient les équations d'une infinité de développées, différant par la valeur initiale θ_0.

La formule (5) conduit à une conséquence importante. Si l'on considère deux développées différentes (θ) et (θ') engendrées par les deux normales MN et MN$'$, on tire de (5)

$$\theta - \theta' = \theta_0 - \theta_0'$$

Donc, *si deux normales* MN *et* MN$'$ *engendrent des développées, elles font entre elles un angle constant.*

Réciproquement, si la normale MN *a une enveloppe, la normale* MN$'$ *en a une aussi, pourvu qu'elle fasse un angle constant avec* MN.

Remarque. — Si la courbe est plane, la torsion $1 : T$ est nulle et θ se réduit à θ_0. Si l'on prend le plan de la courbe comme plan xy, on a $z = \nu = X = Y = 0$ et $Z = 1$; les formules (4) deviennent

$$\xi = x + R\lambda, \qquad \eta = y + R\mu, \qquad \zeta = R \operatorname{tg} \theta_0.$$

Or ξ, η sont les coordonnées du centre de courbure. Par conséquent, les développées sont les hélices qu'on obtient en prenant, sur chaque normale au plan de la courbe élevée au centre de courbure, une longueur proportionnelle au rayon de courbure correspondant.

La développée ordinaire s'obtient en faisant $\theta_0 = 0$ et elle est l'enveloppe des normales principales. Mais on observe que les courbes planes sont les seules dont les normales principales aient une enveloppe, car la formule (5) montre que θ ne peut être constant que si la torsion est nulle.

367. Congruence des normales à une courbe. — La théorie des développées se rattache à celle des congruences de droites (nº 362), car les normales à une courbe sont les génératrices d'une congruence de forme particulière. Par chaque normale à la courbe, on peut faire passer deux développables. La première Δ_1 est le plan normal ; son arête de rebroussement se réduit au point M de la courbe autour duquel tourne la normale qui engendre ce plan. La seconde Δ_2 est une développable proprement dite ; son arête de rebroussement A_2 est une développée. La nappe S_1 de la surface focale se réduit au lieu du point M et dégénère dans une courbe : la courbe proposée. Mais, chaque plan normal Δ_1 étant circonscrit à l'autre nappe S_2 de la surface focale, cette nappe est l'enveloppe du plan normal ou la surface polaire. Les développées sont donc sur la surface polaire, comme on l'a montré directement dans le nº précédent.

CHAPITRE IX.

Lignes tracées sur une surface.

---

§ 1. Courbure des lignes tracées sur une surface.

368. Formule fondamentale. — Il s'agit, dans ce chapitre, d'étudier, en un point M d'une surface S, la courbure des lignes tracées sur la surface et passant par ce point. Les axes seront supposés rectangulaires.

Mettons l'équation de la surface sous la forme

$$z = f(x, y).$$

Il sera entendu que z et ses dérivées partielles des deux premiers ordres sont des fonctions déterminées et continues des deux variables x et y. Nous poserons, en abrégé,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Menons la normale MN au point $M(x, y, z)$ de la surface dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz. Ses cosinus directeurs seront, sans ambiguïté (le radical étant positif),

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Soient maintenant α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT au point M à une courbe (C) de la surface. Les droites MT et MN étant rectangulaires, on a la relation

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0.$$

Différentions-la pour un déplacement sur la courbe (C) ; il vient

$$p\, d\alpha + q\, d\beta - d\gamma + \alpha\, dp + \beta\, dq = 0.$$

Divisons par la différentielle ds de l'arc de la courbe (C) et substituons les valeurs

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{R};$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{r\,dx + s\,dy}{ds} = r\alpha + s\beta, \qquad \frac{dq}{ds} = s\alpha + t\beta,$$

où λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale principale, et R le rayon de courbure de la courbe (C) ; il viendra

$$\frac{p\lambda + q\mu - \nu}{R} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Or, si θ désigne l'angle de la normale MN à la surface S avec la normale principale à la courbe (C), on a

$$\cos\theta = \frac{-p\lambda - q\mu + \nu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ce qui conduit à la *formule fondamentale*

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

369. Theorème. — *Une courbe tracée sur la surface a même rayon de courbure au point* M *que la section plane déterminée dans la surface par son plan osculateur.*

En effet, ces deux courbes ayant même tangente et même normale principale au point M, les quantités θ, α et β ont mêmes valeurs pour les deux courbes et la formule (1) fournit la même valeur pour R.

Ce théorème ramène l'étude de la courbure des courbes quelconques à l'étude de celle des sections planes.

370. Théorème de Meusnier. — *Le rayon de courbure d'une section oblique en un point* M *de la surface, est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale qui a même tangente en* M.

Le rayon de courbure R' d'une section normale étant normal à la surface, on a $\cos\theta = \pm 1$ selon que R' est dirigé suivant MN ou en sens contraire. Le premier membre de (1) se réduit donc à $\pm 1 : R'$, mais on peut admettre qu'il se réduit à $1 : R'$, à condition de considérer R' comme positif dans le sens MN et comme négatif dans l'autre sens. Moyennant cette convention, si l'on appelle R' le rayon de la section normale qui a pour tangente MT, l'équation (1), dont le second membre est indépendant de θ, donnera

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R'}, \qquad \text{d'où} \qquad R = R'\cos\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème nous ramène à l'étude de la courbure des sections normales. Celle-ci a été faite par Euler.

371. Equation d'Euler. Sections et directions principales. — Plaçons maintenant l'origine des coordonnées au point M et prenons la normale MN pour axe des z, donc pour plan xy le plan tangent à la surface. On aura $p = q = 0$. Pour une section normale, la formule fondamentale se réduira (avec la convention faite sur le signe de R) à

$$\frac{1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2. \tag{2}$$

Soit ω l'angle de la tangente MT à la section avec l'axe des x ; il vient, par une transformation facile,

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega$$

$$= \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\omega + s\sin 2\omega.$$

Cette équation montre que $1 : R$ est une fonction continue et limitée de ω : elle a donc au moins un maximum et un minimum. On les trouvera en cherchant les valeurs de ω qui annulent la dérivée par rapport à ω, c'est-à-dire en cherchant les racines de l'équation

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s}{r-t}.$$

Cette équation donne pour ω deux directions rectangulaires. Prenons-les pour axes des x et des y ; l'équation précédente ayant pour racine $\omega = 0$, il faudra que $s = 0$, et l'équation (2) se réduira à

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + t\sin^2\omega.$$

Soient R_1 le rayon de courbure de la section $\omega = 0$; R_2 celui de la section $\omega = \frac{\pi}{2}$; nous aurons $1 : R_1 = r$ et $1 : R_2 = t$. Nous obtenons ainsi l'*équation d'Euler*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}. \tag{3}$$

Les deux directions rectangulaires que nous venons de considérer correspondent aux sections de plus grande et de plus petite courbure. Celles-ci s'appellent les *sections principales*. Les plans de ces sections sont les *plans principaux*. Les rayons de courbure R_1 et R_2 de ces sections sont les *rayons de courbure principaux*. Les centres de courbure

correspondants sont les *centres de courbures principaux*. Les directions des tangentes aux sections principales sont les *directions principales.*

L'équation d'Euler ne dépend plus en rien des axes coordonnés et elle exprime une propriété de la surface. Elle fait dépendre le rayon de courbure d'une section normale quelconque de l'angle que fait le plan de cette section avec celui d'une section principale et des rayons de courbure principaux.

372. Courbure moyenne. — Soient R' et R'' les rayons de courbure de deux directions rectangulaires ω et $\omega + \pi : 2$; on aura, par la formule d'Euler,

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}, \qquad \frac{1}{R''} = \frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2},$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Donc *la somme des courbures de deux sections rectangulaires est constante au point* M *et égale à la somme des courbures principales.* La moitié de cette constante s'appelle la *courbure moyenne* au point M.

373. Forme de la surface au voisinage du point M. Tangentes principales. — On peut distinguer sur la surface des points de trois natures différentes :

1° Si R_1 et R_2 sont de même signe, R a toujours le même signe quel que soit ω et toutes les sections tournent leur concavité dans le même sens. Dans le voisinage de M, la surface se trouve tout entière du même côté de son plan tangent. C'est ce qui a lieu en tout point d'un ellipsoïde.

2° Si R_1 et R_2 sont de signes contraires, R peut changer de signe. Les deux directions correspondant aux racines de

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

donnent $\frac{1}{R} = 0$ et les tangentes correspondantes s'appellent les *tangentes principales*[1]. La surface n'est pas tout entière du même côté de son plan tangent et l'on dit qu'elle est à courbures opposées. C'est ce qui arrive en tout point d'un hyperboloïde à une nappe.

[1] Il est essentiel d'observer que les *tangentes principales* ne correspondent pas aux *directions principales* (n° 371).

3° Un cas intermédiaire entre les deux précédents est celui où l'une des courbures principales, $1 : R_2$ par exemple, est nulle. Il vient alors

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\omega}{R_1}.$$

La surface est située tout entière du même côté de son plan tangent, mais R croît à l'infini pour $\omega = 0$. C'est ce qui arrive en tout point d'une surface cylindrique.

Enfin, il faut signaler le cas particulier où les deux rayons de courbure principaux sont égaux. Alors toutes les sections normales ont même courbure. Un tel point s'appelle un *ombilic* de la surface.

374. Indicatrice de Dupin. — On représente géométriquement la variation du rayon de courbure, quand le plan de la section tourne autour de la normale, par la construction suivante : Portons sur la tangente à la section une longueur MT égale à la racine carrée de la valeur absolue de R ; le point T décrit dans le plan tangent une courbe, appelée *indicatrice*, qui figure la variation de R. La nature de cette courbe dépend de celle du point M.

1°) Si R_1 et R_2 sont de même signe, R est toujours de même signe aussi, par exemple positif. Alors les coordonnées du point T sont $x = \sqrt{R}\cos\omega$, $y = \sqrt{R}\sin\omega$, et l'indicatrice est une ellipse

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 1.$$

On dit, dans ce cas, que M est un *point elliptique.*

2°) Si l'une des courbures principales, $1 : R_2$ par exemple, est nulle, l'indicatrice est dite parabolique et devient un système de deux droites parallèles, à savoir (en supposant R_1 positif)

$$\frac{x^2}{R_1} = 1.$$

On dit, dans ce cas, que M est un *point parabolique.*

3°) Si R_1 et R_2 sont de signes contraires, R est positif quand MT tombe dans l'un des angles entre les tangentes principales et négatif dans l'autre angle. Les coordonnées du point T sont, suivant le cas, $x = \sqrt{\pm R}\cos\omega$, $y = \sqrt{\pm R}\sin\omega$. L'indicatrice se compose de deux hyperboles conjuguées

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1$$

ayant les tangentes principales pour asymptotes. On dit alors que M est un *point hyperbolique.*

On peut faire apparaître autrement le rapport de l'indicatrice avec la forme de la surface autour du point M. Rappelons que le point M a été pris comme origine des coordonnées et les tangentes aux sections principales comme axes des x et des y. Donc, si l'on développe z par la formule de Maclaurin suivant les puissances de x et de y, il vient (p, q, s s'annulant à l'origine)

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + ty^2) + \cdots$$

ou, puisque $r = 1 : R_1$ et $t = 1 : R_2$,

$$2z = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \cdots$$

Coupons la surface par deux plans parallèles, $z = \pm l$, infiniment voisins du plan tangent $z = 0$. Les sections auront pour équations approchées

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 2l.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin du point de contact, la courbe d'intersection est semblable à l'indicatrice de ce point.

375. Détermination de la nature d'un point en axes rectangulaires quelconques. — Supposons maintenant que le point M(x, y, z) occupe une situation quelconque par rapport aux axes de cordonnées supposés rectangulaires. La formule (1) deviendra, pour une section normale quelconque au point M,

$$(5) \qquad \frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Les trois grandes distinctions quant aux variations de signes de $1 : R$ quand on fait varier α, β, s'aperçoivent encore immédiatement, car elles tiennent aux propriétés du trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$.

1° Si $rt - s^2 > 0$, le trinome et par suite R ont un signe invariable et ne peuvent s'annuler. Le point M est *elliptique.*

2° Si $rt - s^2 = 0$, le trinome peut s'annuler mais ne peut changer de signe, le point M est *parabolique.* Tels sont les points d'une surface développable.

3° Si $rt - s^2 < 0$, le trinome et R peuvent changer de signe, le point M est *hyperbolique.*

Les tangentes principales ou les asymptotes de l'indicatrice (n° 373) correspondent aux directions pour lesquelles la courbure est nulle. Les directions des tangentes principales sont donc définies par l'équation :

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0,$$

qui est l'*équation aux directions des tangentes principales.*

376. Détermination des sections principales. — Proposons-nous de déterminer les sections principales au point $M(x, y, z)$. Elles correspondent au maximum et au minimum de $1 : R$ considéré comme fonction de α, β. Donc, d'après l'expression (5), il faut annuler la différentielle de $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$, ce qui donne

$$(6) \qquad r\alpha\, d\alpha + s(\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha) + t\beta\, d\beta = 0.$$

Or α et β sont liés par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2 = 1,$$

puisque $\gamma = p\alpha + q\beta$. En la différentiant, il vient

$$(7) \qquad \alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + (p\alpha + q\beta)\,(p\, d\alpha + q\, d\beta) = 0.$$

Eliminant $d\alpha$ et $d\beta$ entre (6) et (7) ; on trouve

$$(8) \qquad \frac{(1 + p^2)\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta} = \frac{(1 + q^2)\,\beta + pq\alpha}{s\alpha + t\beta}$$

Cette équation du second degré donne deux valeurs pour le rapport $\beta : \alpha$. Elle fait connaître les directions des tangentes aux sections principales. Toutes réductions faites, elle devient

$$(9) \quad \alpha^2[s(1+p^2) - pqr] + \alpha\beta[t(1+p^2) - r(1+q^2)] - \beta^2[s(1+q^2) - pqt] = 0.$$

Remarque. On déduit facilement de l'équation (9) la condition pour qu'un point soit un ombilic. Les sections normales étant indéterminées, l'équation doit être identique, ce qui entraîne

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

Ces deux équations caractérisent un ombilic. Elles constituent, avec celle de la surface, un système de trois équations entre x, y, z. Donc, en général, une surface n'a qu'un nombre limité d'ombilics.

377. Détermination des courbures principales. — Mettons l'équation (8) sous la forme

$$\frac{\alpha + p(p\alpha + q\beta)}{r\alpha + s\beta} = \frac{\beta + q(p\alpha + q\beta)}{s\alpha + t\beta}.$$

Multiplions par α les deux termes du premier rapport, par β ceux du second et ajoutons terme à terme : chacun des rapports est encore égal au suivant

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2} = \frac{1}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2} = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

De sorte qu'en posant, pour simplifier,

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R},$$

on a les égalités

$$\rho = \frac{r\alpha + s\beta}{\alpha(1 + p^2) + pq\beta} = \frac{s\alpha + t\beta}{\beta(1 + q^2) + pq\alpha}.$$

L'élimination du rapport $\alpha : \beta$ entre ces deux équations donne

$$\rho^2(1 + p^2 + q^2) - \rho[r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs] + (rt - s^2) = 0.$$

Cette équation, où l'on remplacera ρ par $\sqrt{1 + p^2 + q^2} : R$, donne les deux rayons de courbures principaux. C'est l'équation cherchée.

Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation en ρ ; on aura

$$\rho_1\rho_2 = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}, \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs}{1 + p^2 + q^2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

La dernière valeur (divisée par 2) est celle de la *courbure moyenne* au point M. La précédente, égale au produit des courbures principales, s'appelle la *courbure totale* de la surface au point M.

§ 2. Lignes asymptotiques et de courbure.

378. Lignes de courbure et développée d'une surface. — Si l'on élève des normales à une surface tout le long d'une ligne (C) de cette surface, le lieu de ces normales est une surface réglée qu'on appelle une *normalie* et qui, en général, est une surface gauche. *On appelle lignes de courbure les lignes de la surface qui sont les traces de normalies développables.*

D'après cette définition, toute ligne plane est une ligne de courbure de son plan, car la normalie correspondante est un cylindre. Toute ligne de la sphère est une ligne de courbure, car la normalie correspondante est un cône. Les méridiens et les parallèles des surfaces de révolution sont des lignes de courbure, car les normalies correspondantes sont des plans et des surfaces coniques.

Les normales à une surface forment une congruence de droites. Par chaque génératrice on peut donc faire passer deux normalies développables (n° 362) et, par suite, par chaque point de la surface, on peut généralement faire passer deux lignes de courbure. Occupons-nous d'abord de déterminer leurs directions.

Les équations de la normale au point quelconque $M(x, y, z)$ sont

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0.$$

Elles dépendent de deux paramètres x et y. Pour que cette normale, en se déplaçant, engendre une développable (ou ait une enveloppe), il faut poser une relation $y = \varphi(x)$ telle que deux normales infiniment voisines se rencontrent (au premier ordre près). Les coordonnées ξ, η, ζ du point de rencontre, qui est celui où la normale touche son enveloppe, doivent vérifier les équations de la normale et leurs dérivées par rapport au paramètre (n° 353), qui sont

$$(\zeta - z)\, dp - (dx + p dz) = 0, \qquad (\zeta - z)\, dq - (dy + q dz) = 0,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \zeta - z = \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'on ait

$$(2) \qquad \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}$$

C'est la relation qui définit la fonction $y = \varphi(x)$, c'est donc l'*équation différentielle des lignes de courbure*. Si l'on y remplace dz, dp et dq par leurs expressions en dx et dy, elle devient

$$(3) \qquad \frac{(1 + p^2)\, dx + pq\, dy}{r dx + s dy} = \frac{pq\, dx + (1 + q^2)\, dy}{s dx + t dy}.$$

Cette équation entre dx et dy coïncide avec celle (8) entre α et β qui définit les directions principales (n° 376). De là le théorème fondamental :

Les lignes de courbure sont, en chaque point, tangentes aux sections

principales. Donc les deux systèmes de lignes de courbure se coupent partout à angle droit et forment sur la surface un système orthogonal.

Déterminons maintenant les points focaux sur la normale au point M. L'ordonnée ζ d'un point focal se tire de l'équation (1). Mais les rapports (1) sont les mêmes que (2) et (3). Comme d'ailleurs dx et dy sont proportionnels aux cosinus α, β relatifs à une direction principale, il vient

$$\zeta - z = \frac{(1+p^2)\,\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta} = \frac{pq\alpha + (1+q^2)\,\beta}{s\alpha + t\beta}.$$

Pour simplifier, portons l'origine en M, prenons les tangentes aux directions principales pour axes des x et des y et la normale à la surface pour axes des z. On aura $x = y = z = 0$; $p = q = s = 0$ et, comme on l'a vu au n° 371, $r = 1 : R_1$, $t = 1 : R_2$. Les deux lignes de courbure correspondent maintenant aux directions $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ et l'on trouve immédiatement, pour chacun de ces deux cas respectivement, $\zeta = R_1$ et $\zeta = R_2$. D'où le théorème suivant :

Les deux points focaux sur la normale au point M *sont les deux centres de courbure principaux correspondants.*

La surface focale de la congruence des normales est donc le lieu des centres de courbure principaux. On l'appelle aussi la *surface des centres* ou la *développée* de la surface proposée.

379. Formules d'Olinde Rodrigue. — Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) et R un des rayons de courbure principaux ; le centre de courbure correspondant a pour coordonnées

$$x + RX, \qquad y + RY, \qquad z + RZ.$$

Pour un déplacement sur la ligne de courbure correspondante, ce centre se déplace tangentiellement à la normale. On a donc

$$\frac{d(x+RX)}{X} = \frac{d(y+RY)}{Y} = \frac{d(z+RZ)}{Z},$$

ou, en supprimant un terme commun dR,

$$\frac{dx + R\,dX}{X} = \frac{dy + R\,dY}{Y} = \frac{dz + R\,dZ}{Z}.$$

Toutes ces fractions sont nulles, car la somme des numérateurs multipliés par X, Y, Z est nulle, tandis que celle des dénominateurs pareillement multipliés est 1. On a donc

$$dx + R\,dX = 0, \qquad dy + R\,dY = 0, \qquad dz + R\,dZ = 0.$$

Ce sont les *formules d'Olinde Rodrigue*, remarquables par leur symétrie et l'expression simple de R qu'on en tire. Elles se réduisent à deux distinctes, car, en multipliant par X, Y, Z et ajoutant, on obtient une identité.

Les formules d'Olinde Rodrigue sont relatives à un déplacement sur une ligne de courbure. Elles reviennent à l'équation différentielle de ces lignes. En effet, si on élimine R entre les deux premières, on trouve

$$dx\, dY - dy\, dX = 0.$$

C'est, sous sa forme la plus concise, l'équation des lignes de courbure : elle se ramène à celle du n° précédent en y remplaçant X et Y par leurs valeurs en p et q et en effectuant les calculs.

Voici encore une forme utile de l'équation des lignes de courbure. Soient u, v, w des quantités simplement proportionnelles aux cosinus de la normale, en sorte qu'on a $X = ul$, $Y = vl$,, $Z = wl$. Les formules d'Olinde Rodrigue s'écrivent

$$dx + R\,d(ul) = dy + R\,d(vl) = dz + R\,d(wl) = 0.$$

Différentiant ces trois produits ul,... on peut éliminer Rl et Rdl entre ces trois équations linéaires, et l'on trouve une forme très générale de l'équation des lignes de courbure

$$\begin{vmatrix} dx & u & du \\ dy & v & dv \\ dz & w & dw \end{vmatrix} = 0$$

On déduit facilement de celle-ci l'équation qui convient au cas d'une représentation paramétrique. Si x, y, z sont exprimés en fonction de deux variables indépendantes α, β, on fera simplement

$$u = \frac{d(y, z)}{d(\alpha, \beta)}, \qquad v = \frac{d(z, x)}{d(\alpha, \beta)}, \qquad w = \frac{d(x, y)}{d(\alpha, \beta)}.$$

En substituant, on obtiendra la relation entre α et β qui définit les lignes de courbure.

380. Lignes asymtotiques. — On appelle *ligne asymptotique* d'une surface une ligne qui touche en chacun de ses points une des asymptotes de l'indicatrice. On obtiendra leur équation différentielle en remplaçant α et β par dx et dy dans l'équation aux directions des tangentes principales (n° 375). On trouve

$$(4) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Si les points de la surface sont hyperboliques, on tire de cette équation deux valeurs réelles pour $dy : dx$. Elle définit, par conséquent, deux familles de lignes asymptotiques se coupant sur la surface.

Si tous les points sont paraboliques (ou si la surface est développable), on ne trouve plus qu'une seule valeur de $dy : dx$ et une seule famille de lignes asymptotiques : c'est donc le système des génératrices rectilignes, car toute génératrice d'une surface réglée, étant une section normale dont la courbure est nulle, est une tangente principale et une ligne asymptotique de la surface.

Enfin, si les points de la surface sont elliptiques, comme cela a lieu sur un ellipsoïde, il n'y a plus de lignes asymptotiques réelles.

On peut donner une autre définition des lignes asymptotiques. Ce sont *les lignes dont le plan osculateur est tangent à la surface.*

En effet, pour exprimer cette propriété, il faut écrire que les coefficients directeurs $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ de la normale principale à la ligne et ceux p, q, -1 de la normale à la surface satisfont à la condition de perpendicularité

$$p\,d\alpha + q\,d\beta - d\gamma = 0.$$

Mais, en différentiant $\gamma = p\alpha + q\beta$, on voit que cette condition se réduit à $\alpha\,dp + \beta\,dq = 0$ ou

$$dx\,dp + dy\,dq = 0,$$

ce qui revient à (4) en développant dp et dq.

§ 3. Tangentes conjuguées. Flexion et torsion géodésique.

381. Tangentes conjuguées. — Deux tangentes en un point M d'une surface sont dites *conjuguées* si elles coïncident avec deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point. Leurs directions sont dites aussi *conjuguées.*

Donc, en vertu des propriétés des coniques, *en un point d'une surface il n'existe qu'un seul système de directions conjuguées rectangulaires, ce sont les directions principales.*

Théorème. — *Si l'on mène les plans tangents à une surface le long d'une courbe* (C), *la caractéristique du plan tangent est, en chaque point* M *de contact, la tangente conjuguée de celle à la courbe* (C).

Pour démontrer ce théorème, revenons au système d'axes considéré précédemment (n° 371). Plaçons l'origine au point M, prenons le plan tangent pour plan xy et les tangentes aux sections principales pour axes des x et des y.

Soient x, y, z les coordonnées des points de la courbe (C), le plan tangent a pour équation

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

La caractéristique s'obtient en combinant cette équation avec sa dérivée par rapport au paramètre, qui est, puisque $dz = pdx + qdy$,

$$(\xi - x)\, dp + (\eta - y)\, dq = 0.$$

Mais, au point M origine des coordonnées, on a (n° 371)

$$x = y = z = p = q = 0, \quad dp = r\,dx = \frac{dx}{R_1}, \qquad dq = t\,dy = \frac{dy}{R_2}$$

Les équations de la caractéristique deviennent

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\xi dx}{R_1} + \frac{\eta dy}{R_2} = 0.$$

Cette droite et la tangente à (C) sont dans le plan xy et ont respectivement comme coefficients angulaires m et m'

$$m = -\frac{R_2 dx}{R_1 dy}, \qquad m' = \frac{dy}{dx}\ ; \qquad \text{d'où} \qquad mm' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

C'est bien la relation qui lie les directions de deux diamètres conjugués de la conique $R_2 x^2 + R_1 y^2 = \pm R_1 R_2$.

Si l'on observe que les plans tangents le long de (C) enveloppent une surface développable, on obtient cet autre énoncé :

Si une développable est circonscrite à une surface, la tangente en un point quelconque de la courbe de contact et la génératrice qui passe par ce point sont deux tangentes conjuguées.

382. Flexion. — Soit M un point d'une courbe (C) tracée sur une surface, MT la tangente à (C) en ce point. Menons à la surface les normales MN et M'N' en deux points infiniment voisins M et M' ; soient φ l'angle de ces deux normales et ds l'arc MM'. On appelle *flexion* de la surface au point M suivant MM' et on désigne par $1 : f$ l'expression

$$\frac{1}{f} = \lim \frac{\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{ds}.$$

Le numérateur (où X, Y, Z sont les cosinus directeurs de la normale à la surface) est, en effet, d'après un calcul bien connu, la valeur principale de φ.

Prenons le point M comme origine, et les mêmes axes qu'au n° précédent. On aura, à l'origine (où s'annulent p, q, s et, par suite, $d\sqrt{1+p^2+q^2}$),

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dX &= d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = dp = r\,dx = \frac{dx}{R_1},\\ dY &= d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = dq = t\,dy = \frac{dy}{R_2},\\ dZ &= d\left(\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Désignons par ω l'angle de la tangente MT avec l'axe Ox ; on aura $dx = ds\cos\omega$, $dy = ds\sin\omega$, et il viendra

$$(2)\qquad \frac{1}{f^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1^2} + \frac{\sin^2\omega}{R_2^2}.$$

Cette formule montre que la flexion au point M ne dépend que de la direction MT de la tangente à la courbe (C).

383. Torsion géodésique. Son signe. — Gardons les notations du n° précédent et appelons ψ l'angle infiniment petit que fait la normale M'N' avec le plan MNT de la section normale. On appelle *torsion géodésique* de la courbe (C) au point M et on désigne par $1 : \gamma$ l'expression

$$\frac{1}{\gamma} = \lim \frac{\psi}{ds}.$$

Menons, à partir de M, un vecteur Mn de longueur 1 et parallèle à M'N'. Au premier ordre près, l'angle ψ peut être remplacé par son sinus, c'est-à-dire par la distance du point n au plan MNT. Or, avec les axes du n° précédent, on a $X = Y = 0$ et $Z = 1$; donc les coordonnées du point n sont, au premier ordre près et eu égard aux valeurs (1),

$$0 + dX = \frac{dx}{R_1},\qquad 0 + dY = \frac{dy}{R_2},\qquad 1 + dZ = 1.$$

La distance de ce point au plan MNT (ayant pour équation $x\sin\omega - y\cos\omega = 0$) sera donc, par la règle connue,

$$dX\sin\omega - dY\cos\omega = \frac{dx\sin\omega}{R_1} - \frac{dy\cos\omega}{R_2} ;$$

et, en la divisant par ds, on trouve

$$(3) \qquad \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin\omega \cos\omega.$$

On attribue à la torsion géodésique le signe qui résulte de cette formule : positif si le point n se trouve, par rapport au plan MNT, du côté des x positifs ; négatif dans le cas opposé. On voit facilement que cette convention revient à considérer la torsion géodésique comme positive ou négative, selon qu'un observateur qui voit venir à lui le point M′, voit tourner la normale en ce point dans le sens positif ou négatif. Le sens positif est celui de la rotation de Ox vers Oy pour un observateur situé sur Oz (en général, celui des aiguilles d'une montre). En tous cas, il sera bien entendu, pour que cette convention ait un sens, que si l'on considère différents systèmes d'axes dans une même question, on leur donne toujours le même sens de rotation.

La formule (3) conduit aux conclusions suivantes :

1°) Sauf si M est un ombilic, auquel cas toutes les directions sont principales, la torsion géodésique ne s'annule que si $\omega = 0$ ou si $\omega = 90°$, donc : *La torsion géodésique est nulle et ne l'est que pour les directions principales.* Par suite, *une ligne dont la torsion géodésique est constamment nulle est une ligne de courbure et réciproquement.*

2°) Si l'on remplace ω par $\omega + 90°$, $1 : \gamma$ ne fait que changer de signe, donc : *Quand deux lignes se coupent à angle droit sur la surface, leurs torsions géodésiques sont égales et de signes contraires.*

384. Calcul de la torsion géodésique dans un cas particulier. — Cherchons la torsion géodésique, au point M, d'une courbe (C) tracée sur la surface S, quand, l'origine étant en M, on prend la tangente MT pour axe des y (fig. 12).

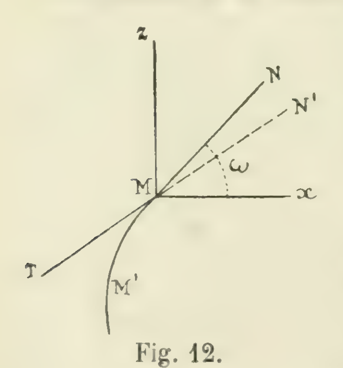


Fig. 12.

Supposons que la normale MN à S fasse un angle ω avec Mx ; les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale seront, au point M,

$$(4) \qquad X = \cos\omega, \quad Y = 0, \quad Z = \sin\omega ;$$

et le plan normal NMT aura pour équation

$$x \sin\omega - z \cos\omega = 0.$$

Soit M′ un point de (C) infiniment voisin de M et soit MN′ une parallèle de longueur 1 à la normale au point M′ ; les coordonnées de N′ seront $(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ en négligeant les termes du second ordre ; et, avec la même approximation, l'angle ψ de MN′ avec le plan MNT sera fourni par la distance du point N′ à ce plan (ou $\sin\psi$), c'est-à-dire, en grandeur et en signe, par l'expression

$$\psi = dX \sin\omega - dZ \cos\omega.$$

Mais la relation $\Sigma X dX = 0$, dérivée de $\Sigma X^2 = 1$, se réduit au point M à

$$0 = dX \cos\omega + dZ \sin\omega,$$

ce qui permet d'éliminer dX ou dZ de l'expression de ψ. On trouve ainsi

$$\psi = \frac{dX}{\sin\omega} = -\frac{dZ}{\cos\omega}.$$

Divisons par ds et accentuons les dérivées par rapport à s ; on aura, au point M,

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{X'}{\sin\omega} = -\frac{Z'}{\cos\omega}. \tag{5}$$

Nous avons établi ces formules pour en tirer la démonstration du théorème suivant :

385. Théorème. — *Si deux surfaces S et S_1 se coupent sous un angle θ, variable ou non, et qu'on désigne par $1 : \gamma$ et $1 : \gamma_1$ les torsions géodésiques de la ligne d'intersection relativement aux deux surfaces, on a, pour un déplacement sur cette ligne,*

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}. \tag{6}$$

Prenons pour origine un point M de l'intersection et la tangente MT à cette ligne pour axe des y. Les formules (4) et (5) s'appliqueront, en ce point, pour la surface S. Pour S_1, on aura les formules analogues (ω_1 étant égale à $\omega + \theta$) :

$$(7)\begin{cases} X_1 = \cos(\omega + \theta), \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = \sin(\omega + \theta) \\ \dfrac{1}{\gamma_1} = \dfrac{X_1'}{\sin(\omega + \theta)} = -\dfrac{Z_1'}{\cos(\omega + \theta)}. \end{cases}$$

Remarquons que $\cos\theta = \Sigma X X_1$ et substituons les valeurs de X, Y, Z, X', Z' ; $X_1, \ldots$ tirées de (4), (5) et (7) dans la relation

$$\frac{d\cos\theta}{ds} = XX'_1 + YY'_1 + ZZ'_1 + X_1X' + Y_1Y' + Z_1Z';$$

elle se réduit à la suivante, revenant à (6) :

$$\frac{d\cos\theta}{ds} = \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_1}\right)\sin\theta.$$

De la formule (6), découle immédiatement le théorème suivant :

386. **Theorème.** — *Si deux surfaces se coupent sous un angle* θ *constant, la torsion géodésique de leur courbe d'intersection est la même pour les deux surfaces; et, réciproquement, si cette torsion est la même, les deux surfaces se coupent sous un angle constant.*

Exercices.

1. Si R se rapporte à la section normale, on a $\frac{1}{f^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

2. La somme des courbures suivant deux directions conjuguées est constante autour d'un même point et égale à la somme des courbures principales.

3. Le produit des flexions de la surface suivant deux directions conjuguées est constant et égale au produit des courbures principales.

§ 4. Théorèmes de Joachimstahl et de Dupin.

387. Théorème de Joachimstahl. — *Si deux surfaces S et* S_1 *se coupent suivant une ligne de courbure, elles font entre elles un angle constant tout le long de cette ligne; et réciproquement, si elles se coupent sous un angle constant, l'intersection ne peut être une ligne de courbure pour l'une sans l'être pour l'autre.*

C'est la conséquence immédiate du théorème précédent, puisque les lignes de courbure ont leur torsion géodésique nulle, ce qui les caractérise (nº 383, 1º).

En particulier, toute ligne du plan étant une ligne de courbure de ce plan, *si une ligne de courbure d'une surface est plane, son plan coupe la surface sous un angle constant, et réciproquement.*

Par exemple, les plans des méridiens et des parallèles coupent une surface de révolution sous un angle constant, donc suivant les deux systèmes de lignes de courbure.

388. **Théorème de Dupin.** — On dit que trois familles de surfaces

$$F_1(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_2(x, y, z, \beta) = 0, \quad F_3(x, y, z, \gamma) = 0,$$

forment un *système triple orthogonal*, lorsque, par chaque point de l'espace, on peut faire passer une surface de chaque famille et que deux surfaces prises dans deux familles différentes se coupent partout orthogonalement.

Théorème. — *Les trois familles d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.*

Soient S_1, S_2 et S_3 les trois surfaces se coupant au point M ; désignons leurs lignes d'intersection par C_{23}, C_{31}, C_{12}. La torsion géodésique de C_{23} est la même sur S_2 et sur S_3 (n° 386) et peut se désigner par $1 : \gamma_{23}$. Soient $1 : \gamma_{31}$ et $1 : \gamma_{12}$ les deux autres torsions analogues. Comme C_{23} et C_{31} se coupent normalement au point M sur S_3, on a en ce point (n° 383, 2°)

$$\frac{1}{\gamma_{23}} + \frac{1}{\gamma_{31}} = 0; \quad \text{de même,} \quad \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{12}} = \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{\gamma_{23}} = \frac{1}{\gamma_{31}} = \frac{1}{\gamma_{12}} = 0.$$

Donc, les torsions géodésiques étant partout nulles, les intersections sont des lignes de courbure pour chaque surface (n° 383, 1°).

389. Quadriques homofocales. — Considérons les quadriques

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1. \quad (a^2 > b^2 > c^2).$$

Par un point (x_0, y_0, z_0) passent trois surfaces. En effet, les valeurs correspondantes de λ sont les racines de l'équation du 3e degré

$$\frac{x_0^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y_0^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z_0^2}{c^2 - \lambda} = 1.$$

Ces trois racines sont réelles et comprises respectivement entre $-\infty$ et c^2, c^2 et b^2, b^2 et a^2, ainsi qu'on le voit en faisant successivement les substitutions $\lambda = -\infty$, $c^2 - \varepsilon$; $c^2 + \varepsilon$, $b^2 - \varepsilon$; $b^2 + \varepsilon$, a^2.

Donc, par chaque point, passent trois quadriques du système : un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Ces trois familles de surfaces forment un système triple orthogonal.

En effet, les normales aux deux surfaces (λ) et (μ) ci-dessous

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \ldots = 1$$

ont pour coefficients directeurs

$$\frac{x}{a^2-\lambda},\quad \frac{y}{b^2-\lambda},\quad \frac{z}{c^2-\lambda};\quad \frac{x}{a^2-\mu},\dots$$

La condition d'orthogonalité est donc

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=0.$$

Or on obtient précisément cette relation en soustrayant membre à membre les équations des deux surfaces (λ) et (μ) écrites ci-dessus et en divisant par $\lambda-\mu$.

Il est maintenant facile de trouver les lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ce sont les intersections de cette surface avec l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad (a^2>\lambda>b^2)$$

et avec l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1 \qquad (b^2>\mu>c^2).$$

Ce sont donc des courbes algébriques.

NOTE COMPLÉMENTAIRE

Addition aux nos 71, 72 et 73

(RÉDUCTION DES INTÉGRALES DOUBLES GÉNÉRALISÉES.)

Nous allons revenir sur les nos 71, 72 et 73, parce que le lemme du n° 72 n'est exact que moyennant une condition qu'on a omis d'exprimer, c'est que, dans le rectangle R, *la fonction* $f(x,y)$ *ne possède pas de ligne des discontinuité parallèle à l'axe des* y, pas même les côtés $x = a$ et $x = A$ du rectangle. Il en résulte que le théorême du n° 73, qui s'appuie sur ce lemme, n'est établi que pour autant que cette condition soit remplie, et exige un complément de démonstration dans le cas contraire. Cette nouvelle démonstration suppose certaines restrictions quant aux lignes de discontinuité parallèles à l'axe des y. Mais nous devons introduire les mêmes restrictions par rapport aux deux axes, à cause de la symétrie supposée dans les numéros 75 et suivants. Disons tout de suite que nous faisons l'hypothèse qui laisse à la démonstration le caractère de simplicité que nous avons voulu lui donner avant tout : c'est que *les lignes de discontinuité parallèles aux axes sont en nombre limité.* Cette hypothèse se vérifie d'ailleurs dans tous les cas qui se présentent pratiquement.

Examinons d'abord d'un peu plus près la démonstration du lemme du n° 72. Elle s'appuie sur deux propriétés de la fonction $F_n(x)$, énoncées, sans explication, aux nos 71 et 72, et sur lesquelles nous allons revenir.

1°) La première (n° 72) est que $F_n(x)$ est continue dans l'intervalle (a, A), Il faut, pour cela, que les frontières des domaines auxiliaires D'_n où $f(x, y)$ est *continue,* ne soient nulle part parallèles à l'axe des y en dehors des côtés $x = a$ et $x = A$ du rectangle R [1]. Comme, au point de vue de la démonstration à faire au n° 73, une frontière parallèle à l'axe des y peut être remplacée par une oblique

[1] Sinon les conditions du théorème I au n° 3 ne seraient pas remplies.

suffisamment voisine, il est toujours possible d'observer cette condition et il sera entendu qu'on l'observe.

2° La seconde propriété de $F_n(x)$ c'est que F est la limite de F_n pour $n = \infty$ (n° 71) et cela pour chaque valeur de x de a à A. On suppose donc que la somme des segments de chaque parallèle à Oy compris dans le domaine D'_n tend vers le segment entier compris dans le domaine R quand D'_n tend vers R. On peut observer cette condition s'il n'y a pas de ligne de discontinuité parallèle à Oy. Mais elle devient impossible dans le cas contraire, car ces parallèles seraient exclues de D'_n. Le lemme du n° 72 suppose donc bien, comme nous l'avons dit, que R *ne contient aucune ligne de discontinuité parallèle à* Oy et que, cela étant, on observe dans la construction des domaines D'_n les deux conditions que nous venons de définir.

Il reste maintenant à compléter la démonstration du théorème I (n° 73) dans le cas où $f(x, y)$ possède un nombre limité de lignes de discontinuité parallèles à l'axe des y. On peut, dans ce cas, partager par ces lignes elles-mêmes le rectangle R en plusieurs autres dont les côtés soient les seules lignes de discontinuité parallèles à l'axe des y. Il suffit alors de démontrer la formule de réduction qui fait l'objet du théorème I pour chacun de ces rectangles séparément. Admettons donc tout de suite que les deux côtés $x = a$ et $x = A$ soient les seules lignes de discontinuité parallèles à l'axe des y pour le rectangle R lui-même. La démonstration est alors immédiate.

En effet, soit R_1 la portion de R limitée par les abscisses $a + \varepsilon$ et $b - \eta$ où ε et η sont infiniment petits. On a, par la démonstration déjà faite au n° 73, pourvu que le second membre déterminé,

$$\iint_{R_1} f dx\, dy = \int_{a+\varepsilon}^{A-\eta} dx \int_b^B f dy$$

et cette formule devient, à la limite, celle qu'il s'agit de démontrer.

Remarquons, pour terminer, que la démonstration du n° 74 ramène le cas d'un domaine infini à celui d'un domaine rectangulaire, au moyen d'une transformation qui fait correspondre les unes aux autres des parallèles aux axes. Cette démonstration demeure donc concluante, pourvu que le nombre des lignes de discontinuité parallèles aux axes soit limité dans le domaine infini. Il serait facile de la généraliser davantage, mais cela nous paraît superflu.

WGR - 4:30 SAT

